Lời nói đầu

Các em học sinh thân mến!

Giảng đường Đại học là nơi gần như em nào cũng muốn được bước vào sau khi rời THPT, dù biết rằng không phải tất cả đều có khả năng, điều kiện để thực hiện ước mơ ấy. Nhằm góp phần giúp các em học sinh thực hiện được mơ ước đó, tác giả biên soạn cuốn ***" Cấp tốc giải 10 chuyên đề 10 điểm thi môn Toán".***

Cuốn sách được biên soạn theo nội dung chuẩn kiến thức, kỹ năng. Trong sách được trình bày từng vấn đề, theo cấu trúc đề thi của Bộ giáo dục và Đào tạo để bạn đọc tiện tham khảo. Mỗi vấn đề sẽ có:

- Tóm tắt các kiến thức lý thuyết cơ bản.
- Lời giải chi tiết các dạng toán thường gặp và ví dụ minh họa.
- Các bài tập rèn luyện kỹ năng, có hướng dẫn chi tiết.

Tác giả chủ trương tránh đưa vào sách những phần lý thuyết nặng nề và ít sử dụng. Mỗi ví dụ, lời giải lại có nhận định sâu sắc, kèm theo lời bình khiến người đọc tâm đắc và sẽ có tư duy sáng tạo riêng của mình khi gặp những câu hỏi khó, bài toán khó lạ khác.

Phần bài tập tự luyện được tác giả biên soạn rất công phu và tập hợp nhiều dạng toán hay, mới mẻ. Giúp người học không chỉ có thể thử sức những bài toán rèn luyện tư duy, mà còn giải một cách dễ dàng những bài toán hóc búa, tưởng chừng không thể nào giải nổi. Một số bài tập có thể khó nhưng cách giải được dựa trên nền tảng kiến thức và kỹ năng cơ bản. Tác giả hi vọng, khi gặp một đề thi khó, lạ người học sẽ không còn ngại ngùng trong việc đưa ra lời giải cho mỗi bài toán.

Cuốn sách là sự kế thừa những hiểu biết chuyên môn và kinh nghiệm của chính tác giả trong quá trình trực tiếp đứng lớp bồi dưỡng.Tác giả hi vọng, người học cần phải nắm vững kiến thức căn bản trước khi tham gia bài tập tự luyện.

Để đạt hiệu quả cao trong kì thi Đại học sắp tới, tác giả hi vọng các em sử dụng cuốn ***"Cấp tốc giải 10 chuyên đề 10 điểm thi môn Toán"*** song song với cuốn "Luyện thi cấp tốc môn toán" mà tác giả sắp ấn hành, phần bài mới có nhiều bài toán mới lạ và có nhiều cách giải hay và đẹp. Các em học sinh đón đọc. Hai cuốn sách được ví như mỗi cá thể đi tìm một nửa kia trái tim, mong muốn kết tinh tình yêu thật đẹp. Mỗi cuốn sách, một phong cách, một nét đẹp!.

Với "sáng tác độc đáo và đầy tư duy ngẫu hứng" này, tác giả tin tưởng các em học sinh sẽ vững tin bước vào kỳ thi Đại học sắp tới. Sinh viên sư phạm và quý thầy cô sẽ có thêm nhiều tài liệu để tham khảo.

Mặc dù tác giả đã dành nhiều tâm huyết cho cuốn sách, song sự sai sót là điều khó tránh khỏi. Chúng tôi rất mong nhận được sự phản biện và góp ý quý báu của quý độc giả để những lần tái bản sau cuốn sách được hoàn thiện hơn.

Tác giả

Chuyên đề I

MỘT SỐ BÀI TOÁN THƯỜNG GẶP VỀ ĐỒ THỊ

↳ Chủ đề 1: Tiếp tuyến của đồ thị hàm số.

- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tọa độ tiếp điểm $M(x_0;y_0)$, hoặc hoành độ x_0, hoặc tung độ y_0.
- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$ cho trước.
- Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc của nó.

❑ **Phương pháp:**

Cho hàm số $y=f(x)$ có đồ thị (C) và $M(x_0;y_0)$ là điểm trên (C). Tiếp tuyến với đồ thị (C) tại $M(x_0;y_0)$ có:

- Hệ số góc: $k=f'(x_0)$
- Phương trình: $y-y_0=k(x-x_0)$, hay $y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$

Vậy, để viết được phương trình tiếp tuyến tại $M(x_0;y_0)$ chúng ta cần đủ ba yếu tố sau:

- Hoành độ tiếp điểm: x_0
- Tung độ tiếp điểm: y_0 (Nếu đề chưa cho, ta phải tính bằng cách thay x_0 vào hàm số $y_0=f(x_0)$)
- Hệ số góc $k=f'(x_0)$

Dạng 1. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tọa độ tiếp điểm

Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tọa độ tiếp điểm $M(x_0;y_0)$, hoặc hoành độ x_0, hoặc tung độ y_0.

Bài toán 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại điểm $M(x_0;f(x_0))$.

Giải. Tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ tại $M(x_0;y_0)$ là:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

Bài toán 2. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ biết hoành độ tiếp điểm $x=x_0$.

Giải: Tính $y_0=f(x_0)$, $y'(x_0)\Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

Bài toán 3. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y=f(x)$ biết tung độ tiếp điểm bằng y_0.

Giải. Gọi $M(x_0;y_0)$ là tiếp điểm

Giải phương trình $f(x)=y_0$ ta tìm được các nghiệm x_0.

Tính $y'(x_0) \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số: $y=x^3-3x^2+2$

1. Tại điểm $(2;-2)$

2. Tại điểm có hoành độ $x=-1$

3. Tại điểm có tung độ $y=-2$

4. Tại giao điểm của đồ thị với $y=x-1$

Lời giải

Hàm số đã cho xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Gọi $M_0(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm và $y_0=y(x_0)=x_0^3-3x_0^2+2$

$y'=3x^2-6x$, tiếp tuyến tại điểm M_0 có hệ số góc: $y'(x_0)=3x_0^2-6x_0$

1. Ta có : $x_0=2 \Rightarrow y'(2)=0$.

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $M(2;-2)$: $y=0(x-2)-2=-2$

2. Ta có: $x_0=-1\Rightarrow y_0=-2, y'(-1)=9$

Phương trình tiếp tuyến: $y=9(x+1)-2=9x+7$

3. Ta có: $y_0=6\Rightarrow x_0^3-3x_0^2+2=-2\Leftrightarrow x_0^3-3x_0^2+4=0$

$\Leftrightarrow (x_0+1)(x_0-2)^2=0\Leftrightarrow x_0=-1$ hoặc $x_0=2$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(-1;-2)$: $y=9x+7$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(2;-2)$: $y=-2$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=-2$, $y=9x+7$.

4. Phương trình hoành độ giao điểm : $x^3-3x^2+2=x-1$

$\Leftrightarrow x^3-3x^2-x+3=0\Leftrightarrow (x-3)(x^2-1)=0\Leftrightarrow x=3$ hoặc $x=\pm1$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(-1;-2)$: $y=9x+7$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(1;0)$: $y=-3x+3$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm $(3;2)$: $y=9x-25$

Vậy, có 3 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=9x+7$, $y=-3x+3$, $y=9x-25$.

Ví dụ 2. Cho hàm số: $y=x^3-(m-1)x^2+(3m+1)x+m-2$. Tìm m để tiếp uyến của đồ thị hàm số tại điểm có hoành độ bằng 1 đi qua điểm $A(2;-1)$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-2(m-1)x+3m+1$

Với $x=1\Rightarrow y(1)=3m+1\Rightarrow y'(1)=m+6$

Phương trình tiếp tuyến tại điểm có $x=1$: $y=(m+6)(x-1)+3m+1$

Tiếp tuyến này đi qua $A(2;-1)$ nên có: $-1=m+6+3m+1\Leftrightarrow m=-2$

Vậy, $m=-2$ là giá trị cần tìm.

Dạng 2. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp tuyến đi qua điểm cho trước

Viết phương trình tiếp tuyến khi biết tiếp tuyến đi qua điểm $A(x_A;y_A)$ cho trước

Giải: Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm. Khi đó tiếp tuyến có dạng:

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+y_0$$

Vì tiếp tuyến đi qua A nên có: $y_A=f'(x_0)(x_A-x_0)+y_0$, giải phương trình này ta tìm được x_0, suy ra phương trình tiếp tuyến.

Ví dụ 1. Viết phương trình tiếp tuyến d với đồ thị (C): $y=\dfrac{x+2}{x-2}$, biết d đi qua điểm $A(-6;5)$.

Lời giải.

Cách 1: Gọi $(x_0;y(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm của tiếp tuyến d và (C), với $y(x_0)=\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$, tiếp tuyến d có hệ số góc $y'(x_0)=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}$, $x_0\neq 2$ và d có phương trình: $y=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$

d đi qua điểm $A(-6;5)$ nên có $5=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}(-6-x_0)+\dfrac{x_0+2}{x_0-2}$ phương trình này tương đương với $x_0^2-6x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=6$

* Với $x_0=0$, ta có phương trình: $y=-x-1$

* Với $x_0=6$, ta có phương trình: $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài $y=-x-1$, $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$.

Cách 2: Phương trình d đi qua $A(-6;5)$ có hệ số góc k, khi đó d có phương trình là : $y=k(x+6)+5$

d tiếp xúc (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ:

$\begin{cases} k(x_0+6)+5=\dfrac{x_0+2}{x_0-2} \\ k=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2} \end{cases}$ có nghiệm x_0 hay $\begin{cases} 4x_0^2-24x_0=0 \\ k=-\dfrac{4}{(x_0-2)^2} \end{cases}$ có nghiệm x_0

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0=0,\ k=-1 \Rightarrow d: y=-x-1 \\ x_0=6,\ k=-\dfrac{1}{4} \Rightarrow d: y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2} \end{array}\right.$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài $y=-x-1$, $y=-\dfrac{x}{4}+\dfrac{7}{2}$.

* **Nhận xét 1**: Qua **cách 1** ta thấy đường thẳng $d: y=-x-1$ luôn tiếp xúc với (C) tại tiếp điểm $M(0;-1)$ và đường thẳng d luôn vuông góc với đường thẳng IM với I là giao điểm 2 đường tiệm cận.

Qua đó ta có bài toán sau:

Tìm trên đồ thị $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ *những điểm* M *sao cho tiếp tuyến tại* M *vuông góc với đường thẳng* IM, *với* $I(2;1)$.

Gợi ý.

Gọi $(x_0;y(x_0))$ là tọa độ tiếp điểm cần tìm với $y(x_0)=1+\dfrac{4}{x_0-2}$ và tiếp tuyến tại M có hệ số góc $y'(x_0)=\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}$, $x_0\neq 2$.

Đường thẳng IM có hệ số góc k và $k=\dfrac{y(x_0)-y(x_I)}{x_0-x_I}=\dfrac{4}{(x_0-2)^2}$

Tiếp tuyến tại M vuông góc IM khi và chỉ khi $y'(x_0).k=-1$ tức là

$\dfrac{-4}{(x_0-2)^2}\cdot\dfrac{4}{(x_0-2)^2}=-1$ hay $(x_0-2)^4=16 \Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $x_0=4$

Vậy, $M_1(0;-1)$, $M_2(4;3)$ là tọa độ cần tìm.

* **Nhận xét 2**: Dễ thấy, tiếp tuyến tại M_1, M_2 song song với nhau, hơn nữa đường thẳng qua 2 điểm M_1, M_2 song song với đường phân giác thứ nhất của mặt phẳng tọa độ tức là tiếp tuyến tại M_1, M_2 có hệ số góc là $y'(0)=y'(4)=-1$

* **Qua đó, ta có bài toán sau:**

Giả sử đường thẳng $\Delta: x-y-m=0$ *cắt đồ thị* $y=\dfrac{x+2}{x-2}$ *tại 2 điểm phân biệt* M_1, M_2.

1. *Gọi* k_1, k_2 *lần lượt là hệ số góc của* d_1, d_2 *tại* M_1, M_2. *Tìm tọa độ* M_1, M_2 *sao cho* $k_1+k_2=-2$.

2. *Tìm giá trị* $m\in\mathbb{R}$ *để tiếp tuyến tại* M_1, M_2 *song song với nhau.*

Ví dụ 2. Viết phương trình tiếp tuyến d của đồ thị $(C): y=\dfrac{2x+1}{x+1}$ biết d cách đều 2 điểm $A(2;4)$ và $B(-4;-2)$.

Lời giải

Gọi $M(x_0;y(x_0))$, $x_0\neq -1$ là tọa độ tiếp điểm của d và (C)

Khi đó d có hệ số góc $y'(x_0)=\dfrac{1}{(x_0+1)^2}$ và có phương trình là:

$$y=\frac{1}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+2-\frac{1}{x_0+1}$$

Vì d cách đều A, B nên d đi qua trung điểm $I(-1;1)$ của AB hoặc cùng phương với AB.

TH1: d đi qua trung điểm $I(-1;1)$, thì ta luôn có:

$1=\dfrac{1}{(x_0+1)^2}(-1-x_0)+2-\dfrac{1}{x_0+1}$, phương trình này có nghiệm $x_0=1$

Với $x_0=1$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

TH2: d cùng phương với AB, tức là d và AB có cùng hệ số góc, khi đó $y'(x_0)=k_{AB}=\dfrac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=1$ hay $\dfrac{1}{(x_0+1)^2}=1 \Leftrightarrow x_0=-2$ hoặc $x_0=0$

Với $x_0=-2$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y=x+5$.

Với $x_0=0$ ta có phương trình tiếp tuyến $d: y=x+1$.

Vậy, có 3 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y=\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$, $y=x+5$, $y=x+1$

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^4-4x^2+3$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C) đi qua điểm $A(0;4)$ có hệ số góc m, biết tiếp tuyến tiếp xúc với (C) tại bốn điểm phân biệt.

Lời giải

Phương trình đường thẳng d đi qua A có hệ số góc m có dạng: $y=mx+4$.

d tiếp xúc đồ thị (C) tại điểm có hoành độ x_0 khi hệ:

$\begin{cases} x_0^4-4x_0^2+3=mx_0+4 \\ 4x_0^3-8x_0=m \end{cases}$ có nghiệm $x_0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3x_0^4-4x_0^2+1=0 \\ m=4x_0^3-8x_0 \end{cases}$ có nghiệm x_0

$$\text{hay} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x_0^2 = 1 \\ x_0^2 = \dfrac{1}{3} \end{array}\right. \\ m = 4x_0^3 - 8x_0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} m = -4 \\ m = 4 \\ m = -\dfrac{20\sqrt{3}}{9} \\ m = \dfrac{20\sqrt{3}}{9} \end{array}\right.$$

Với $m = -4$, tiếp tuyến $y = -4x + 4$, tiếp điểm $M_1(1;0)$

Với $m = 4$, tiếp tuyến $y = 4x + 4$, tiếp điểm $M_2(-1;0)$

Với $m = -\dfrac{20\sqrt{3}}{9}$, tiếp tuyến $y = -\dfrac{20\sqrt{3}}{9}x + 4$, tiếp điểm $M\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{16}{9}\right)$

Với $m = \dfrac{20\sqrt{3}}{9}$, tiếp tuyến $y = \dfrac{20\sqrt{3}}{9}x + 4$, tiếp điểm $M\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3};\dfrac{16}{9}\right)$

Vậy, qua A kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị (C):

$$y = -4x + 4,\ y = 4x + 4,\ y = \frac{20\sqrt{3}}{9}x + 4,\ y = \frac{20\sqrt{3}}{9}x + 4$$

❑ **Mở rộng**: *Dạng toán qua 1 điểm kẻ được 4 tiếp tuyến đến đồ thị là dạng toán ít gặp. Để hiểu kĩ hơn dạng toán này, ta giải bài toán sau:*

"Biện luận theo m số tiếp tuyến của (C): $y = x^4 - 6x^2$ vẽ từ điểm $M(3;m)$".

Gợi ý: Phương trình tiếp tuyến (d) của (C) vẽ từ $M(3;m)$ có dạng: $y=k(x-3)+m$

(d) và (C) tiếp xúc nhau tại điểm cóp hoành độ x_0, từ đó suy ra:

$$m = x_0^4 - 6x_0^2 - \left(4x_0^3 - 12x_0\right)\left(x_0 - 3\right) = g(x_0)$$

Ta có: $g'(x_0) = 0 \Leftrightarrow x_0 = -1$ hoặc $x_0 = 1$ hoặc $x_0 = 3$

Từ bảng biến thiên suy ra:

- $m < -21$ hoặc $m = 27$: có 2 tiếp tuyến.
- $m = -21$ hoặc $m = -9$: có 3 tiếp tuyến.
- $-21 < m < -9$ hoặc $-9 < m < 27$: có 4 tiếp tuyến.
- $m > 27$: không có tiếp tuyến nào.

Dạng 3. Viết phương trình tiếp tuyến khi biết hệ số góc cho trước

- Tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$
- Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$
- Tiếp tuyến cùng với đường thẳng $(d): ax + by + c = 0$ tạo thành góc φ.

Ví dụ 1. Cho hàm số: $y = \dfrac{2x+2}{x-1}$ có đồ thị (C).

Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C).

1. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1.

2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

3. Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân.

4. Tiếp tuyến tại điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến trục Oy bằng 2.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định với $\forall x \neq 1$. Ta có: $y' = \dfrac{-4}{(x-1)^2}$

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, suy ra phương trình tiếp tuyến của (C):

$$y = \frac{-4}{(x_0-1)^2}(x - x_0) + \frac{2x_0+2}{x_0-1} \text{ với } y'(x_0) = \frac{-4}{(x_0-1)^2} \text{ và } y_0 = \frac{2x_0+2}{x_0-1}$$

1. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng -1

Nên có: $\dfrac{-4}{(x-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = 3,\ x_0 = -1$

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$
- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1,\ y = -x + 7$.

2. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $d: y = -4x + 1$.

Nên có: $y'(x_0) = -4 \Leftrightarrow \dfrac{-4}{(x_0-1)^2} = -4 \Leftrightarrow x_0 = 0$ hoặc $x_0 = 2$

- Với $x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 2 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 2$
- Với $x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 6 \Rightarrow \Delta: y = -4x + 14$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -4x + 2,\ y = -4x + 14$.

3. Tiếp tuyến tạo với 2 trục tọa độ lập thành một tam giác cân nên hệ số góc của tiếp tuyến bằng ± 1. Mặt khác: $y'(x_0) < 0$, nên có: $y'(x_0) = -1$

Tức $\dfrac{-4}{(x_0-1)^2} = -1 \Leftrightarrow x_0 = -1$ hoặc $x_0 = 3$.

- Với $x_0 = -1 \Rightarrow y_0 = 0 \Rightarrow \Delta: y = -x - 1$
- Với $x_0 = 3 \Rightarrow y_0 = 4 \Rightarrow \Delta: y = -x + 7$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $y = -x - 1,\ y = -x + 7$.

4. Khoảng cách từ $M(x_0;y_0)$ đến trục Oy bằng 2 suy ra $x_0 = \pm 2$, suy ra $M\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$, $M(2;6)$.

Phương trình tiếp tuyến tại $M\left(-2;\dfrac{2}{3}\right)$ là: $y = -\dfrac{4}{9}x - \dfrac{2}{9}$

Phương trình tiếp tuyến tại $M(2;6)$ là: $y = 4x + 14$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -\frac{4}{9}x - \frac{2}{9}$, $y = 4x + 14$.

Ví dụ 2. Tìm tất cả các giá trị của k để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C): $y = x^3 + 6x^2 + 9x + 3$ phân biệt và có cùng hệ số góc k, đồng thời đường thẳng đi qua các tiếp điểm của 2 tiếp tuyến đó với (C) cắt các trục Ox, Oy tương ứng tại A, B sao cho $OA = 2012.OB$.

Lời giải

Hoành độ tiếp điểm x_0 của tiếp tuyến dạng $y = kx + m$ với (C) là nghiệm của phương trình $f'(x_0) = k \Leftrightarrow 3x_0^2 + 12x_0 + 9 - k = 0$ (1)

Để tồn tại 2 tiếp tuyến với (C) phân biệt nhau thì phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt, khi đó $\Delta' = 9 + 3k > 0$ hay $k > -3$ (2).

Khi đó, tọa độ tiếp điểm $(x_0; y_0)$ của 2 tiếp tuyến với (C) là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} y_0 = x_0^3 + 6x_0^2 + 9x_0 + 3 \\ 3x_0^2 + 12x_0 + 9 = k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{1}{3}(x_0 + 2)\left(3x_0^2 + 12x_0 + 9\right) - 2x_0 - 3 \\ 3x_0^2 + 12x_0 + 9 = k \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y_0 = \frac{1}{3}(x_0 + 2)k - 2x_0 - 3 = \frac{k - 6}{3}x_0 + \frac{2k - 9}{3} \\ 3x_0^2 + 12x_0 + 9 = k \end{cases}$$

Vậy phương trình đường thẳng đi qua các tiếp điểm là (d): $y = \frac{k - 6}{3}x + \frac{2k - 9}{3}$.

Do (d) cắt trục Ox, Oy tương ứng tại A và B sao cho $OA = 2012.OB$ nên có thể xảy ra:

- Nếu $A \equiv O$ thì $B \equiv O$, trường hợp này chỉ thỏa nếu (d) cũng qua O.

  Khi đó $k = \frac{9}{2}$.

- Nếu $A \neq O$, khi đó trong tam giác AOB vuông tại O sao cho

  $\tan\widehat{OAB} = \frac{OB}{OA} = 2012 \Rightarrow \frac{k - 6}{3} = \pm 2012 \Rightarrow k = 6042$

  hoặc $k = -6030$ (không thỏa (2)).

Vậy $k = \frac{9}{2}$, $k = 6042$ thỏa bài toán.

Chú ý:

- *Cho hai đường thẳng* $(d_1): y = k_1x + b$ *và* $(d_2): y = k_2x + m$.

1. $(d_1) \parallel (d_2) \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b \neq m \end{cases}$
2. $(d_1), (d_2)$ *cùng phương* $\Leftrightarrow k_1 = k_2$

3. $(d_1) \perp (d_2) \Leftrightarrow k_1.k_2 = -1$
4. $\left(\widehat{(d_1),(d_2)}\right) = \beta \Rightarrow \cos\beta = \frac{|k_2k_1 + 1|}{\sqrt{k_1^2 + 1}.\sqrt{k_2^2 + 1}}$

- *Giả sử* $A(x_1; y_1)$, $B(x_2; y_2)$, *đường thẳng đi qua hai điểm phân biệt* A, B *có hệ số góc* $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $x_2 \neq x_1$.

Bài tập tự luyện:

1. Viết phương trình tiếp tuyến với đồ thị hàm số: $y = \frac{2x}{x - 1}$, biết:

a. Hệ số góc của tiếp tuyến bằng -2

b. Tiếp tuyến song song với đường thẳng $(d): x + 2y = 0$

c. Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $(\Delta): 9x - 2y + 1 = 0$

Hướng dẫn giải

Ta có: $y' = \frac{2(x - 1) - 2x}{(x - 1)^2} = \frac{-2}{(x - 1)^2}$

Gọi $(x_0; y_0)$ là tọa độ tiếp điểm, ta có hệ số góc tiếp tuyến tại $(x_0; y_0)$ bằng $y'(x_0) = \frac{-2}{(x_0 - 1)^2}$

a. Theo giả thiết, ta có: $y'(x_0) = -2 \Leftrightarrow \frac{-2}{(x_0 - 1)^2} = -2$

$$\Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 - 1 = 1 \\ x_0 - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = 2 \Rightarrow y_0 = 4 \\ x_0 = 0 \Rightarrow y_0 = 0 \end{array}\right.$$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -2x + 8, y = -2x$

b. Theo giả thiết, ta có: $\frac{-2}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = \frac{1}{4}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -\frac{1}{2}x + \frac{27}{4}, y = -\frac{1}{2}x - \frac{7}{4}$

c. Theo giả thiết, ta có: $\frac{-2}{(x_0 - 1)^2} = -\frac{2}{9} \Leftrightarrow (x_0 - 1)^2 = \frac{1}{9}$

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y = -\frac{2}{9}x + \frac{32}{9}, y = -\frac{2}{9}x + \frac{8}{9}$

2. Cho hàm số: $y = x^3 - 3mx^2 - x + 3m$ có đồ thị (C_m). Định m để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

Hướng dẫn giải

(C_m) tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ phương trình:

$\begin{cases} x_0^3-3mx_0^2-x+3m=0 \\ 3x_0^2-6mx_0-1=0 \end{cases}$ có nghiệm x_0 tức hệ $\begin{cases} x_0\left(x_0^2-1\right)-3m\left(x_0^2-1\right)=0 \\ 3x_0^2-6mx_0-1=0 \end{cases}$.

có nghiệm x_0 $\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_0^2-1\right)\left(x_0-3m\right)=0 \\ 3x_0^2-6mx_0-1=0 \end{cases}$ có nghiệm $x_0 \Rightarrow m=\pm\dfrac{1}{3}$

3. Cho hàm số: $y=x^4+x^3+(m-1)x^2-x-m$ có đồ thị (C_m). Định m để (C_m) tiếp xúc với trục hoành.

Hướng dẫn giải

(C_m) tiếp xúc với trục hoành tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases} x_0^4+x_0^3+(m-1)x_0^2-x_0-m=0 \\ 4x_0^3+3x_0^2+(m-1)x_0-1=0 \end{cases}$ có nghiệm x_0

$\Leftrightarrow \begin{cases} x_0^2\left(x_0^2-1\right)+x_0\left(x_0^2-1\right)+m\left(x_0^2-1\right)=0 \\ 4x_0^3+3x_0^2+(m-1)x_0-1=0 \end{cases}$ có nghiệm x_0

$\Leftrightarrow \begin{cases} \left(x_0^2-1\right)\left(x_0^2+x_0+m\right)=0 \\ 4x_0^3+3x_0^2+(m-1)x_0-1=0 \end{cases}$ có nghiệm $x_0 \Rightarrow m=-2, m=0, m=\dfrac{1}{4}$

4. Cho hàm số $y=(2-x)^2x^2$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C):

a. Tại giao điểm của (C) với Parabol $y=x^2$.

b. Tiếp tuyến đi qua điểm $A(2;0)$.

Hướng dẫn giải

$$y=x^4-4x^3+4x^2 \Rightarrow y'=4x^3-12x^2+8x$$

a. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$x^4-4x^3+4x^2=x^2 \Leftrightarrow x^2\left(x^2-4x+3\right)=0 \Leftrightarrow x=0, x=1, x=3$$

* Với $x=0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=0$

* Với $x=1 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=1$

* Với $x=3 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến: $y=24x-63$

b. $M(x_0;y_0)\in(C)$. Tiếp tuyến (t) của (C) tại $M(x_0;y_0)$:

$$y=\left(4x_0^3-12x_0^2+8x_0\right)(x-x_0)+x_0^2(x_0-2)^2$$

$$A(2;0)\in(t) \Leftrightarrow (2-x_0)\left(3x_0^3-10x_0^2+8x_0\right)=0 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=2, x_0=\frac{4}{3}$$

* Với $x_0=0 \Rightarrow y'(0)=0, y_0=0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=0$

* Với $x_0=2 \Rightarrow y'(2)=0, y_0=0 \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=0$

* Với $x=\dfrac{4}{3} \Rightarrow y'\left(\dfrac{4}{3}\right)=-\dfrac{32}{27}, y_0=\dfrac{64}{81} \Rightarrow$ phương trình tiếp tuyến $y=-\dfrac{32}{27}x+\dfrac{64}{27}$

5. Cho hàm số $y=\dfrac{2x-1}{x-1}$, có đồ thị (C). Viết phương trình tiếp tuyến của (C).

a. Tiếp tuyến có hệ số góc bằng $-\dfrac{1}{4}$.

b. Tiếp tuyến tạo với hai tiệm cận một tam giác có chu vi nhỏ nhất.

c. Khoảng cách từ $I(1;2)$ đến tiếp tuyến lớn nhất.

d. Tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với IM.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của (C) và tiếp tuyến (d).

Tiếp tuyến (d) tại $M(x_0;y_0)$: $y=\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}(x-x_0)+\dfrac{2x_0-1}{x_0-1}$

a. $-\dfrac{1}{(x_0-1)^2}=-\dfrac{1}{4} \Leftrightarrow x_0=3, x_0=-1$

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$.

b. Tiếp tuyến (d) cắt tiệm cận đứng tại $A\left(1;\dfrac{2x_0}{x_0-1}\right)$, cắt đường tiệm cận ngang tại $B(2x_0-1;2) \Rightarrow IA=\dfrac{2}{|x_0-1|}, IB=2|x_0-1| \Rightarrow IA.IB=4$.

Chu vi tam giác IAB : $p=AB+IA+IB=\sqrt{IA^2+IB^2}+IA+IB$

Mặt khác: $IA^2+IB^2\ge 2IA.IB=8$, $IA+IB\ge 2\sqrt{IA.IB}=4$. Nên $p\ge 2\sqrt{2}+4$

Đẳng thức xảy ra khi: $IA=IB \Leftrightarrow (x_0-1)^2=4 \Leftrightarrow x_0=3, x_0=-1$

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$

c. Gọi H là hình chiếu của I lên (d), ta có: $d(I,\Delta)=IH$

Trong tam giác vuông IAB, có : $\dfrac{1}{IH^2}=\dfrac{1}{IA^2}+\dfrac{1}{IB^2}\ge\dfrac{2}{IA.IB}=\dfrac{1}{2}$. Suy ra: $IH\le\sqrt{2}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow IA=IB$

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến là: $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{13}{4}$ và $y=-\dfrac{1}{4}x+\dfrac{5}{4}$

d. Đường thẳng (d) có vectơ chỉ phương $\vec{u}=\left(1;\dfrac{-1}{(x_0-1)^2}\right)$

$\overrightarrow{IM}=\left(x_0-1;\dfrac{1}{x_0-1}\right)$, $IM\perp(d) \Leftrightarrow x_0-1-\dfrac{1}{(x_0-1)^3}=0 \Leftrightarrow x_0=0, x_0=2$

Từ đó ta tìm được tiếp tuyến: $y=-x+1, y=-x+5$

6. Viết phương trình tiếp tuyến (d) của (C) tại điểm M thuộc (C): $y=x^4+2x^2-1$ sao cho (d) vuông góc với AM, biết $A\left(0;\frac{17}{8}\right)$

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là tọa độ tiếp điểm của (C)

$\overrightarrow{AM}=\left(x_0;x_0^4+2x_0^2-\frac{25}{8}\right)$, đường thẳng (d) tiếp tuyến tại M có vectơ pháp tuyến là $\vec{n}=\left(4x_0^3+4x_0;-1\right)$. Theo bài toán, ta có $\overrightarrow{AM}$ và $\vec{n}$ cùng phương, từ đây tìm được $M(0;-1)$, $M(-1;2)$, $M(1;2)$.

7. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C): $y=-\frac{1}{4}x^4-x^2+\frac{5}{4}$, biết d cắt trục hoành , trục tung lần lượt tại A và B sao cho $OA>OB$, sao cho diện tích tam giác OAB bằng $\frac{3}{2}$ và khoảng cách từ O đến d bằng $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

Hướng dẫn giải

Gọi H là hình chiếu vuông góc của O lên d thì $OH=d(O;d)$

Ta có: $\begin{cases}\frac{1}{2}OA.OB=\frac{3}{2}\\ \frac{1}{OA^2}+\frac{1}{OB^2}=\frac{1}{OH^2}=\frac{10}{9}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}OA.OB=3\\ OA^2+OB^2=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}OA=3\\ OB=1\end{cases}$

Hệ số góc của đường thẳng d là $k=\pm\frac{OB}{OA}=\pm3$

Tiếp tuyến d: $y=-3x+3$, $y=3x+3$.

8. Viết phương trình tiếp tuyến d của (C): $y=\frac{x+3}{x+1}$ tại điểm M sao cho tiếp tuyến tại M của (C'): $(x+1)^2+(y-1)^2=\frac{16}{5}$ cũng là tiếp tuyến của (C).

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C') có tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=\frac{4}{\sqrt{5}}$

Tiếp tuyến (d) tại $M\left(1;\frac{2}{(x_0+1)^2}\right)$ thuộc (C) có phương trình :

$$\frac{2}{(x_0+1)^2}(x-x_0)+y-1-\frac{2}{x_0+1}=0$$

(d) là tiếp tuyến chung của (C) và (C') nên $d[I,d]=R$, từ đây ta tìm được phương trình : $(x_0+1)^4-5(x_0+1)^2+4=0$

9. Gọi M là điểm bất kì trên (C) của hàm số $y=\frac{2x-3}{x-2}$ và I là giao điểm 2 đường tiệm cận. Tiếp tuyến (d) của (C) tại M cắt 2 đường tiệm cận tại A và B. Tìm tọa độ điểm M sao cho đường tròn ngoại tiếp tam giác IAB có diện tích bằng 2π.

Hướng dẫn giải

Gọi $M\left(x_0;\frac{2x_0-3}{x_0-2}\right), x_0\neq2$ là điểm thuộc (C).

Tiếp tuyến (d) tại M có hệ số góc là: $y'(x_0)=-\frac{1}{(x_0-2)^2}$

Phương trình có dạng: $(d): y=\frac{-1}{(x_0-2)^2}(x-x_0)+\frac{2x_0-3}{x_0-2}$, (d) cắt 2 tiệm cận lần lượt tại: $A\left(2;\frac{2x_0-2}{x_0-2}\right)$, $B(2x_0-2;2)$

ΔIAB vuông tại I và $S_{IAB}=2\pi\Leftrightarrow(x_0-2)^2+\frac{1}{(x_0-2)^2}=2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=1\Rightarrow M(1;1)\\ x_0=3\Rightarrow M(3;3)\end{array}\right.$

10. Lập phương trình tiếp tuyến của đồ thị (C) : $y=\frac{2x+3}{x+1}$ tại những điểm thuộc đồ thị có khoảng cách đến đường thẳng (d): $3x+4y-2=0$ bằng 2.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_0;y_0)$ là điểm thuộc đồ thị (C), khi đó: $y_0=y(x_0)=\frac{2x_0+3}{x_0+1}$

Ta có: $d[M,(d)]=2\Leftrightarrow\frac{|3x_0+4y_0-2|}{\sqrt{3^2+4^2}}=2\Leftrightarrow3x_0+4y_0-12=0$ hoặc $3x_0+4y_0+8=0$

TH1: $3x_0+4y_0-12=0\Leftrightarrow3x_0+4\left(\frac{2x_0+3}{x_0+1}\right)-12=0\Leftrightarrow3x_0^2-x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$

hoặc $x_0=\frac{1}{3}$

TH2: $3x_0+4y_0+8=0\Leftrightarrow3x_0+4\left(\frac{2x_0+3}{x_0+1}\right)+8=0\Leftrightarrow3x_0^2+19x_0+20=0$

$\Leftrightarrow x_0=-5$ hoặc $x_0=-\frac{4}{3}$

Phương trình tiếp tuyến (d) tại M thuộc đồ thị (C) có dạng:

$y=y'(x_0)(x-x_0)+y(x_0)$ trong đó và $y'(x_0)=\frac{-1}{(x_0+1)^2}$, $x_0\neq -1$.

Phương trình tiếp tuyến (d_1) tại $M_1(0;3)$ là $y=-x+3$.

Phương trình tiếp tuyến (d_2) tại $M_2\left(\frac{1}{3};\frac{11}{4}\right)$ là $y=-\frac{9}{16}x+\frac{47}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến (d_3) tại $M_3\left(-5;\frac{7}{4}\right)$ là $y=-\frac{1}{16}x+\frac{23}{16}$.

Phương trình tiếp tuyến (d_4) tại $M_4\left(-\frac{4}{3};-1\right)$ là $y=-9x-13$.

Vậy, có 4 tiếp tuyến thỏa đề bài:

$$y=-x+3,\ y=-\frac{9}{16}x+\frac{47}{16},\ y=-\frac{1}{16}x+\frac{23}{16},\ y=-9x-13.$$

11. Tìm tất cả các điểm trên đường thẳng $30x-24y+61=0$ để từ đó kẻ đến đồ thị $(C):\ y=-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+2x+\frac{7}{3}$ 3 tiếp tuyến tương ứng với 3 tiếp điểm có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa $x_1<x_2<0<x_3$.

Hướng dẫn giải

$M\in(d):\ 30x-24y+61=0\Rightarrow M\left(m;\frac{5m}{4}+\frac{61}{24}\right)$

Phương trình tiếp tuyến của (C) tại $N(x_0;y_0)$:

$$y-\left(-\frac{x_0^3}{3}-\frac{x_0^2}{2}+2x_0+\frac{7}{3}\right)=\left(-x_0^2-x_0+2\right)(x-x_0)$$

Tiếp tuyến đi qua M

$$\Leftrightarrow \frac{5m}{4}+\frac{61}{24}-\left(-\frac{x_0^3}{3}-\frac{x_0^2}{2}+2x_0+\frac{7}{3}\right)=\left(-x_0^2-x_0+2\right)(m-x_0)$$

$$\frac{2}{3}x_0^3+\left(\frac{1}{2}-m\right)x_0^2-mx_0+\frac{3m}{4}-\frac{5}{24}=0\quad(*)$$

Để thỏa yêu cầu bài toán thì phương trình $(*)$ có hai nghiệm âm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m^2+\frac{7m}{3}-\frac{5}{12}>0\\ \frac{5}{18}-m>0\\ \frac{3}{2}m-\frac{5}{4}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m<-\frac{5}{2}\ \text{ hay }\ m>\frac{1}{6}\\ m<\frac{5}{18}\\ m<\frac{5}{6}\end{cases}$$

Vậy, những điểm M nằm trên đường thẳng d có hoành độ m thỏa

$$m<-\frac{5}{2}\ \text{ hoặc }\ \frac{1}{6}<m<\frac{5}{18}$$

12. Tìm tham số m để parapol $(P):\ y=x^2-x+1$ và đồ thị (C_m) của hàm số $y=x^3-4mx^2+7mx-3m$ tiếp xúc nhau.

Hướng dẫn giải

(P) và (C_m) tiếp xúc nhau tại điểm có hoành độ x_0 khi và chỉ khi hệ phương trình: $\begin{cases}x_0^2-x_0+1=x_0^3-4mx_0^2+7mx_0-3m\\ 2x_0-1=3x_0^2-8mx_0+7m\end{cases}$ có nghiệm x_0

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0-1)\left(x_0^2-4mx_0+1+3m\right)=0\\ 2x_0-1=3x_0^2-8mx_0+7m(*)\end{cases}\ \text{có nghiệm } x_0$$

- $*$ Với $x_0=1$ thay vào phương trình $(*)$, ta được $m=2$
- $*$ Với $x_0^2-4mx_0+1+3m=0$ kết hợp phương trình $(*)$ ta được hệ:

$$\begin{cases}2x_0-1=3x_0^2-8mx_0+7m\\ \left(x_0^2-4mx_0+1+3m\right).3=0.3=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_0=\frac{m+1}{2m-1},m\neq\frac{1}{2}\\ \left(\frac{m+1}{2m-1}\right)^2-4m\left(\frac{m+1}{2m-1}\right)+1+3m=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow(4m+1)(m-2)(m-1)=0\ \text{hay}\ m\in\left\{-\frac{1}{4};1;2\right\}$$

13. Viết phương trình tiếp tuyến của đồ thị $(C):\ y=x^3-6x^2+9x-1$, để tiếp tuyến đó cách đều 2 điểm $A(2;7)$ và $B(-2;7)$.

Hướng dẫn giải

Tiếp tuyến d của đồ thị (C) cách đều A,B khi và chỉ khi hoặc d đi qua trung điểm I của AB hoặc là $d\parallel AB$.

Vậy, có 4 tiếp tuyến thỏa đề bài: $y+1=0$, $y-3=0$, $y=-3x+7$, $y=24x+7$

14. Gọi (d) là tiếp tuyến của đồ thị $(C):\ y=\frac{x-1}{x+3}$, giả sử (d) cắt 2 tiệm cận tại A,B. I là giao điểm 2 tiệm cận. Viết phương trình (d) để:

a. $IA=4IB$ **b.** $IA+IB=8$

Hướng dẫn giải

Do giả thiết không nói rõ là (d) cắt tiệ, cận theo thứ tự nào để có tọa độ A,B. Vì thế cần phải chia ra từng trường hợp để giải. Tác giả hướng dẫn 1 trường hợp, trường hợp còn lại giành cho bạn đọc.

Giả sử (d) cắt tiệm cận đứng tại $A\left(-3;\frac{x_0^2-2x_0-15}{(x_0+3)^2}\right)$ cắt tiệm cận ngang tại $B(2x_0+3;1)$.

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

a. Tiếp tuyến (d) có hệ số góc là $k=\pm\dfrac{IA}{IB}=\pm 4$, suy ra có 2 tiếp tuyến.

b. $IA=\dfrac{8}{|x_0+3|}$, $IB=|x_0+3|$, theo bài toán ta suy ra $(x_0+3)^2=4$

Chủ đề 2: Tương giao giữa hai đồ thị.

- Lập phương trình hoành độ giao điểm của hai đồ thị (C): $y=f(x)$ và $(C'): y=g(x)$ là: $f(x)=g(x)$ $(*)$.
- Biện luận số nghiệm của phương trình $(*)$, số nghiệm phương trình $(*)$ là số giao điểm của (C) và (C').

Ví dụ 1.

1. Tìm m để đường thẳng $d: y=-x+1$ cắt đồ thị (C) hàm số $y=4x^3-6mx^2+1$ tại 3 điểm $A(0;1)$, B, C sao cho:

a. B, C đối xứng qua $y=x$ **b.** $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=-4$

2. Tìm m để hàm số $y=-x^4+4mx^2-4m$ cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt M, N, P, Q $(x_M<x_N<x_P<x_Q)$ sao cho $MQ=2NP$.

Lời giải

1. d cắt đồ thị (C) tại 3 điểm $A(0;1)$, B, C khi $4x^3-6mx^2+1=-x+1$ có 3 nghiệm phân biệt tức phương trình $4x^2-6mx+1=0$ có 2 nghiệm phân biệt khác 0, nghĩa là $\begin{cases}\Delta'=9m^2-4>0\\ 4.0^2-6m.0+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow |m|>\dfrac{2}{3}$.

Giả sử $B(x_1;-x_1+1)$, $C(x_2;-x_2+1)$ là giao điểm d và (C).

a. Để B và C đối xứng nhau qua $y=x$ khi và chỉ khi $\begin{cases}x_1=y_2=-x_2+1\\ x_2=y_1=-x_1+1\end{cases}$ hay $x_1+x_2=1\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}m=1\Leftrightarrow m=\dfrac{2}{3}$.

Đối chiếu điều kiện, suy ra không có m để thỏa bài toán.

b. $\overrightarrow{OB}.\overrightarrow{OC}=-4\Leftrightarrow$ $x_1.x_2+(-x_1+1)(-x_2+1)=-4$ hay $2x_1.x_2-(x_1+x_2)+5=0$

$\Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{3}{2}m+5=0$ $\Leftrightarrow m=-\dfrac{11}{3}$.

2. Phương trình hoành độ giao điểm của hàm số và trục hoành:

$-x^4+4mx^2-4m=0$ (1). Đặt $t=x^2$, $(t\geq 0)$ khi đó phương trình (1) trở thành $-t^2+4mt-4m=0$, $t\geq 0$ (2).

Để đồ thị cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt M, N, P, Q khi và chỉ khi phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt dương $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=4m^2-4m>0\\ P=4m>0\\ S=4m>0\end{cases}$ hay $m>1$.

Với $m>1$ phương trình (2) có 2 nghiệm phân biệt $t_1=2m-2\sqrt{m^2-m}$ hoặc $t_2=2m+2\sqrt{m^2-m}$, giả sử $t_1<t_2$.

$MQ=2NP\Leftrightarrow OQ^2=4OP^2$ tức là $t_2=4t_1\Leftrightarrow 5\sqrt{m^2-m}=3m$, bình phương 2 vế và rút gọn ta được phương trình $16m^2-25m=0$, phương trình này có $m=\dfrac{25}{16}$ thỏa điều kiện $m>1$.

Ví dụ 2.

1. Cho hàm số $y=\dfrac{mx+2}{x-1}$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để trên đồ thị (C_m) có 2 điểm P, Q cách đều 2 điểm $A(-3;4)$, $B(3;-2)$ và diện tích tứ giác $APBQ$ bằng 24.

2. Gọi (d) là đường thẳng đi qua $A(2;0)$ có hệ số góc m cắt đồ thị (C): $y=-x^3+6x^2-9x+2$ tại 3 điểm phân biệt A,B,C. Gọi B',C' lần lượt là hình chiếu vuông góc của B,C lên trục tung. Tìm giá trị dương của m để diện tích hình thang $BB'C'C$ bằng 8

Lời giải

1. Từ giả thiết suy ra P, Q nằm trên trung trực của đoạn AB.

Phương trình PQ: $x-y+1=0$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và PQ:

$\dfrac{mx+2}{x-1}=x+1$ $\Leftrightarrow x^2-mx-3=0,\ x\neq 1$ (1)

PQ cắt (C_m) tại 2 điểm phân biệt P, Q khi và chỉ khi phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt khác 1, tức là $\begin{cases}\Delta>0\\ m+2\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq -2$

Với $m\neq -2$, phương trình (1) có 2 nghiệm x_1, x_2.

Gọi tọa độ $P(x_1;x_1+1)$, $Q(x_2;x_2+1)\Rightarrow PQ=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}$

Diện tích tứ giác $APBQ$ bằng 24

$\Leftrightarrow d(A;PQ).PQ=24$ $\Leftrightarrow 3\sqrt{2}\sqrt{2(x_2-x_1)^2}=24$ $\Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-4x_1x_2=16$ (2)

Theo định lý Vi – et , ta có: $x_1+x_2=m$, $x_1.x_2=-3$

Thay vào (2) ta được $m^2+12-16=0 \Leftrightarrow m=-2$ hoặc $m=2$

Đối chiếu điều kiện, ta thấy $m=2$ thỏa mãn bài toán.

2. Đường thẳng (d) có phương trình: $y=m(x-2)$.

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$$-x^3+6x^2-9x+2=m(x-2) \Leftrightarrow (x-2)\left(x^2-4x+1+m\right)=0$$

Với $m>0$, (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt A,B,C và A là trung điểm BC khi và chỉ khi phương trình $x^2-4x+1+m=0$ $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 khác 2 đồng thời $m>0 \Leftrightarrow \begin{cases} m>0 \\ \Delta=3-m>0 \Leftrightarrow 0<m<3 \\ m\neq 3 \end{cases}$

Với $0<m<3$ thì (d) cắt (C) tại 3 điểm phân biệt $A(2;0)$, $B\left(2-\sqrt{3-m};-m\sqrt{3-m}\right)$, $C\left(2+\sqrt{3-m};m\sqrt{3-m}\right)$.

Theo bài toán, $S_{BB'C'C}=\dfrac{BB'+CC'}{2}B'C'=8 \Leftrightarrow \left|m\sqrt{3-m}\right|=2$, bình phương 2 vế rồi rút gọn ta được $m^3-3m^2+4=0 \Leftrightarrow (m+1)(m-2)^2=0 \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=2$. Đối chiếu điều kiện $0<m<3$, suy ra $m=2$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 3.

1. Tìm tọa độ M,N để đường thẳng $(d): y=x+m$ cắt đồ thị $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt M,N sao cho $S_{IMN}=4$ (I là giao điểm 2 tiệm cận).

2. Viết phương trình đường thẳng (d) đi qua gốc tọa độ O cắt đồ thị (C) $y=\dfrac{2}{x}$ tại 4 điểm phân biệt là 4 đỉnh của 1 hình chữ nhật có diện tích bằng $\dfrac{32}{3}$.

Lời giải

1. Phương trình hoành độ giao điểm: $\dfrac{2x+1}{x-1}=x+m \Leftrightarrow x^2+(m-3)x-m-1=0$, $x\neq 1$ $(*)$

Vì phương trình $(*)$ có $\Delta=m^2-2m+13>0, \forall m\in\mathbb{R}$ nên phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt, tức đường thẳng đã cho cắt đồ thị tại 2 điểm phân biệt M,N với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Gọi $M(x_1;x_1+m)$ và $N(x_2;x_2+m)$ là tọa độ cần tìm.

$$S_{IMN}=4 \Leftrightarrow \frac{1}{2}.MN.d\left[I,(d)\right]=4 \text{ hay } MN.d\left[I,(d)\right]=8 \quad (**)$$

Lại có: $MN=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(x_2+m-x_1-m)^2}=\sqrt{(x_2+x_1)^2-4x_2.x_1}$

Hay $MN=\sqrt{2\left(m^2-2m+13\right)}$

$(d): x-y+m=0 \Rightarrow d\left[I,(d)\right]=\dfrac{|m-1|}{2}$

Khi đó: $(**) \Leftrightarrow \sqrt{2\left(m^2-2m+13\right)}\dfrac{|m-1|}{2}=8$, bình phương 2 vế rồi rút gọn ta được: $(m-1)^4+12(m-1)^2-64=0$, đặt $t=(m-1)^2\geq 0$,

ta được $t^2+12t-64=0 \Rightarrow t=4$ tức $(m-1)^2=4 \Leftrightarrow m=-1$ hoặc $m=3$.

$*$ Với $m=-1$ thì phương trình $(*)$ trở thành: $x^2-4x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=4$
$\Rightarrow M(0;-1),N(4;3)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

$*$ Với $m=3$ thì phương trình $(*)$ trở thành: $x^2-4=0 \Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=2$
$\Rightarrow M(-2;1),N(2;5)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

Vậy, $M(0;-1),N(4;3)$ hoặc $M(-2;1),N(2;5)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

2. Đường thẳng (d) qua O có dạng: $y=kx$, $y=mx$ (k,m đều khác 0 và $k\neq m$).

Gọi A,B là giao điểm của (d) và (C) thì tọa độ A,B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} y=\dfrac{2}{x} \\ y=kx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{2}{k} \\ y=kx \end{cases}.$$

Để A,B tồn tại thì $k>0$, khi đó $A\left(-\sqrt{\dfrac{2}{k}};-\sqrt{2k}\right)$, $B\left(\sqrt{\dfrac{2}{k}};\sqrt{2k}\right)$.

Tương tự $m>0$, ta có: $M\left(-\sqrt{\dfrac{2}{m}};-\sqrt{2m}\right)$, $N\left(\sqrt{\dfrac{2}{m}};\sqrt{2m}\right)$.

Vì O là tâm đối xứng của (C) nên ABMN là hình bình hành. Do đó ABMN là hình chữ nhật có diện tích bằng $\dfrac{32}{3}$ khi và chỉ khi

$$\begin{cases} OA=OM \\ AM.AN=\dfrac{32}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} mk=1 \\ k+m=\dfrac{10}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k=3 \\ m=\dfrac{1}{3} \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} k=\dfrac{1}{3} \\ m=3 \end{cases}$$

Vậy, (d) có phương trình: $y=\dfrac{1}{3}x, y=3x$.

Bài tập tự luyện:

1. Cho hàm số $y=\frac{x+2}{2x-2}$ có đồ thị là (C). Tìm tất cả các giá trị tham số $m\in\mathbb{R}$ để đường thẳng (d): $y=x+m$ cắt đồ thị (C) tại 2 điểm phân biệt A, B sao cho $OA^2+OB^2=\frac{37}{2}$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C): $\frac{x+2}{2x-2}=x+m$

$\Leftrightarrow g(x)=2x^2+(2m-3)x-2(m+1)=0,\ x\neq 1$

Vì $\begin{cases}\Delta_g=4m^2+4m+25>0\\ g(1)=3\neq 0\end{cases}\ \forall m\in\mathbb{R}$ nên (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt với $\forall m\in\mathbb{R}$.

Gọi $A(x_1;x_1+m)$, $B(x_2;x_2+m)$ là tọa độ giao điểm của (d) và (C).

Theo định lý Vi-ét, ta có $x_1+x_2=-\frac{2m-3}{2}$, $x_1.x_2=-(m+1)$.

Ta có: $OA^2+OB^2=x_1^2+(x_1+m)^2+x_2^2+(x_2+m)^2$

$=2(x_1+x_2)^2-4x_1.x_2+2m(x_1+x_2)+2m^2$

$=2\left(-\frac{2m-3}{2}\right)^2+4(m+1)+2m\left(-\frac{2m-3}{2}\right)+2m^2=\frac{1}{2}\left(4m^2+2m+17\right)$

Giả thiết: $OA^2+OB^2=\frac{37}{2}\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(4m^2+2m+17\right)=\frac{37}{2}$

$2m^2+m-10=0\Leftrightarrow m=-\frac{5}{2}$ hoặc $m=2$.

Vậy $m=-\frac{5}{2}$ hoặc $m=2$ là giá trị cần tìm.

2. Cho hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+2m+1$ có đồ thị là (C_m). Tìm tất cả các giá trị tham số $m\in\mathbb{R}$ để đồ thị hàm số đã cho cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt A,B,C,D lần lượt có hoành độ x_1,x_2,x_3,x_4 $(x_1<x_2<x_3<x_4)$ sao cho tam giác ACK có diện tích bằng 4, biết $K(3;-2)$.

Hướng dẫn giải

$x^4-2(m+1)x^2+2m+1=0$ (1). Đặt $t=x^2$ $(t\geq 0)$, phương trình (1) trở thành $t^2-2(m+1)t+2m+1=0$ (2).

Để đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt thì phương trình (2) có hai nghiệm phân biệt $t>0$ $\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(m+1)^2-(2m+1)\\ S=2(m+1)>0\\ P=2m+1>0\end{cases}\Leftrightarrow m\neq 0$ và $m>-\frac{1}{2}$.

Với $-\frac{1}{2}<m\neq 0$ thì đồ thị của hàm số cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt có hoành độ theo thứ tự $-\sqrt{t_1};-\sqrt{t_2};\sqrt{t_2};\sqrt{t_1}$ với $t_1>t_2$.

Theo giả thiết $S_{ACK}=\frac{1}{2}AC.d(K;AC)$ (3) với $d(K;AC)=|y_K|$.

Khi đó (3) $\Leftrightarrow\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=4\Leftrightarrow t_1+t_2+2\sqrt{t_1t_2}=16$

Áp dụng định lý Vi-et cho phương trình (2), ta được:

$2(m+1)+2\sqrt{2m+1}=16\Leftrightarrow\sqrt{2m+1}=7-m\Leftrightarrow\begin{cases}m-7\geq 0\\ m^2-16m+48=0\end{cases}\Rightarrow m=4$.

3. Tìm tham số m sao cho đồ thị (C): $y=x^3+3x^2$ và (H_m): $y=\frac{(m+1)x+m-35}{x+1}$ cắt nhau tại 2 điểm phân biệt.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm (C) và (H_m) là:

$x^3+3x^2=\frac{(m+1)x+m-35}{x+1}\Leftrightarrow x^3+3x^2+\frac{36}{x+1}=m+1$ $(*)$

(C) và (H_m) cắt nhau tại 2 điểm phân biệt khi và chỉ khi phương trình $(*)$ có 2 nghiệm phân biệt khác -1 khi đó $f(x)=m+1$ có 2 giao điểm.

Xét hàm số: $f(x)=x^3+3x^2+\frac{36}{x+1}$ trên $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$

Ta có: $f'(x)=3\left(x^2+2x\right)-\frac{36}{(x+1)^2}=3.\frac{(x+1)^4-(x+1)^2-12}{(x+1)^2}$

Và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=-3$ hoặc $x=1$

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^-}f(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}f(x)=+\infty$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m<-19$ hoặc $m>21$.

4. Cho hàm số $y=\frac{1+x}{1-2x}$ có đồ thị là (C). Tìm tham số m để đường thẳng d_m: $y=x+2m$ cắt đồ thị (C) tại hai điểm phân biệt A và B cùng điểm I tạo thành tam giác có diện tích bằng 1, với $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

Hướng dẫn giải

$d[I,d_m]=\dfrac{|2m+1|}{\sqrt{2}}$, $AB=\sqrt{2(x_2-x_1)^2}$

$S_{IAB}=1\Rightarrow 16m^4+32m^3+12m^2-4m-6=0\Rightarrow m=\dfrac{1}{2}$

5. Tìm m để đường thẳng $d:\ y=x+m+2$ cắt đồ thị $(C_m):\ y=x^3+3x^2+mx-1$ tại 3 điểm phân biệt A,B,C sao cho $BC=4,\ x_A=1$.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm $(x-1)(x^2+4x+m+3)=0$

Với $-8\neq m<1$ thì d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt

$BC^2=2(x_1+x_2)^2-8x_1x_2=8(1-m),\ BC=4\Rightarrow m=-1$.

6. Tìm m để đường thẳng $d:\ y=x-m$ cắt đồ thị $(C_m):\ y=x^3+3x^2+mx-3$ tại 3 điểm phân biệt x_1,x_2,x_3 sao cho biểu thức $T=2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)+3x_1^2x_2^2x_3^2-5$ đạt giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m):

$(x+1)(x^2+2x+m-3)=0$, với $m<4$ thì $T=3m^2-22m+44$

$=3\left(m-\dfrac{11}{3}\right)^2+\dfrac{11}{3}\geq\dfrac{11}{3}\Rightarrow \min T=\dfrac{11}{3}$ khi $m=\dfrac{11}{3}$

7. Tìm m để đường thẳng $d: y=mx-1$ cắt đồ thị $(C_m):\ y=2x^3-3x+m$ tại 3 điểm phân biệt $A(1;y_A)$, B,C sao cho $M(2;2m-1)$ nằm trong đoạn BC và $MB=2MC$

Hướng dẫn giải

Phương trình hoành độ giao điểm của d và (C_m): $(x-1)(2x^2+2x-m-1)=0$.

Với $-\dfrac{3}{2}<m\neq 3$ thì d cắt (C_m) tại 3 điểm phân biệt. Do $MB=2MC$ và M nằm trong đoạn BC $\Rightarrow\overrightarrow{MB}=-2\overrightarrow{MC}$ $\Rightarrow m=55$

8. Tìm m để đường thẳng (d) qua điểm $A(1;0)$ có hệ số góc m cắt đồ thị (C): $y=\dfrac{x+2}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt M, N thuộc 2 nhánh của (C) sao cho $\overrightarrow{AN}+2\overrightarrow{AM}=\vec{0}$ và $x_M<x_N$.

Hướng dẫn giải

$(d):\ y=m(x-1)$. Phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (C):

$mx^2-(2m+1)x+m=0,\ x\neq 1\ (1)$

Theo bài toán, ta có phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $x_1<1<x_2\Rightarrow m>0$. Giả sử $x_M=x_1,\ x_N=x_2$.

Lại có: $x_N+2x_M=3\Rightarrow m=2$.

9. Tìm $m\neq 0$ để đường thẳng $y=-x+m$ cắt đồ thị (C_m) của hàm số: $y=\dfrac{1}{3}x^3-(m-2)x^2+3(2m-3)x+m$ tại 3 điểm phân biệt $A(0;m)$, B, C đồng thời OA là đường phân giác trong của $\widehat{BOC}$ trong ΔBOC.

Hướng dẫn giải

$B(x_B;-x_B+m)$, $C(x_C;-x_C+m)$

Vì OA là đường phân giác trong của $\widehat{BOC}$ trong ΔBOC nên

$$\frac{AC}{AB}=\frac{OC}{OB}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{2x_C^2}}{\sqrt{2x_B^2}}=\frac{\sqrt{x_C^2+(x_C-m)^2}}{\sqrt{x_B^2+(x_B-m)^2}}\Rightarrow\frac{x_C-m}{x_C}=\frac{x_B-m}{x_B}$$

$\Leftrightarrow 2x_B.x_C-m(x_B+x_C)=0\Rightarrow m^2-14m+10=0$

10. Tìm m để hàm số : $y=x^3-(2m+3)x^2+(2m^2-m+9)x-2m^2+3m-7$ cắt trục hoành tại 3 điểm phân biệt, trong đó có 2 điểm có hoành độ lớn hơn 1 và khoảng cách giữa 2 điểm này là lớn nhất.

Hướng dẫn giải

$(x-1)\left[x^2-2(m+1)x+2m^2-3m+7\right]=0$

Theo bài toán, phương trình $x^2-2(m+1)x+2m^2-3m+7=0$ có 2 nghiệm phân biệt x_1,x_2 thỏa mãn $1<x_1<x_2\Rightarrow 2<m<3$

Khi đó $BC^2=(x_2-x_1)^2=1-4\left(m-\dfrac{5}{2}\right)^2\leq 1$.

11. Tìm m để đường thẳng $(d):\ y=x+m$ cắt đồ thị $(C):\ y=\dfrac{2x+1}{x-1}$ tại 2 điểm phân biệt M,N thỏa mãn: $\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AN}$, trong đó A là giao điểm của (d) với trục hoành.

Hướng dẫn giải

$\forall m\in\mathbb{R}$ thì (d) cắt (C) tại 2 điểm phân biệt M,N và $A(-m;0)$

$\overrightarrow{AM}=4\overrightarrow{AN}\Leftrightarrow x_1+m=4(x_2+m)$ hoặc $x_2+m=4(x_2+m)$

✎ Chủ đề 3: Điểm thuộc đồ thị.

Tìm tất cả các điểm M thuộc đồ thị (C): $y=f(x)$, biết M thỏa mãn tính chất T cho trước.

Ví dụ 1. Tìm trên đồ thị (C): $y=x^3-3x^2+1$, 2 điểm M, N sao cho $MN=4\sqrt{2}$ và tiếp tuyến tại đó song song với nhau.

Lời giải

Giả sử $M\left(m,m^3-3m^2+1\right)$, $N\left(n,n^3-3n^2+1\right)$ với $m\neq n$ là tọa độ thỏa đề bài.

Vì tiếp tuyến tại M,N song song với nhau nên $y'(m)=y'(n)$

hay $3m^2-6m=3n^2-6n \Leftrightarrow (m-n)(m+n-2)=0 \Rightarrow n=2-m,\ m\neq 1$

Hơn nữa $MN^2=(m-n)^2+\left(m^3-3m^2+1-n^3+3n^2-1\right)^2$, rút gọn ta được

$MN^2=4(m-1)^6-24(m-1)^4+40(m-1)^2$, do $n=2-m$

Mà $MN=4\sqrt{2}$ suy ra $4t^3-24t^2+40t=32$ với $t=(m-1)^2, t>0$, giải ra được $t=4$, từ đây có $(m;n)=(3;-1)$ hoặc $(-1;3)$

Vậy, điểm cần tìm $M(3;-1)$, $N(-1;3)$.

Ví dụ 2. Tìm tọa độ 2 điểm B, D sao cho ABCD là hình vuông, biết rằng D là điểm nằm trên đường thẳng $d: x+y-2=0$; $I(1;9)$ là trung điểm AC; A và C là 2 điểm nằm trên đồ thị $y=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}x^2-\frac{7}{3}x+\frac{7}{2}$.

Lời giải

Gọi $A\left(a;\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{7}{3}a+\frac{7}{2}\right)$, $C\left(c;\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{2}c^2-\frac{7}{3}c+\frac{7}{2}\right)$

là 2 tọa độ điểm thuộc đồ thị của hàm số.

$$\text{I là trung điểm AC}: \begin{cases}\dfrac{a+c}{2}=1\\ \dfrac{\left(\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{7}{3}a+\frac{7}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}c^3-\frac{1}{2}c^2-\frac{7}{3}c+\frac{7}{2}\right)}{2}=9\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=2\\ \frac{1}{3}(a+c)\left[(a+c)^2-3ac\right]-\frac{1}{2}\left[(a+c)^2-2ac\right]-\frac{7}{3}(a+c)-11=0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a+c=2\\ ac=-15\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-3\\ c=5\end{cases}\text{ hay }\begin{cases}a=5\\ c=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}A(-3;-3)\\ C(5;21)\end{cases}\text{ hoặc ngược lại}$$

TH1: $A(-3;-3)$ và $C(5;21)$.

$d:\begin{cases}x=t\\ y=2-t\end{cases}$ và $D\in(d)\Rightarrow D(t;2-t)$

Ta có: $AD=(3+t;5-t)$, $CD=(-5+t;-19-t)$

ABCD là hình vuông khi và chỉ khi $\begin{cases}\overrightarrow{DA}.\overrightarrow{DC}=0\\ DA=DC\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}t=-11 \vee t=5\\ (3+t)^2+(5-t)^2=(t-5)^2+(-19-t)^2\end{cases}\Rightarrow t=-11 \text{ tức } D(-11;13).$$

Vì $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}=(16;8)\Rightarrow B(13;5)$

Vậy, $A(-3;-3)$, $B(13;5)$, $C(5;21)$, $D(-11;13)$ là tọa độ cần tìm.

TH2: $A(5;21)$ và $C(-3;-3)$ tương tự.

Ví dụ 3. Cho hàm số $y=x^3-5x^2+10x-8$, có đồ thị (C)

1. Gọi A là điểm thuộc (C), C là điểm thuộc đường thẳng $d: x-7y+25=0$ và $I\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)$ là trung điểm AC. Tìm tọa độ điểm B có hoành độ âm sao cho tam giác OAB vuông cân tại A,
2. Gọi E,F theo thứ tự là giao điểm của đường tròn ngoại tiếp tứ giác OABC với trục hoành, trục tung (E,F khác O). Tìm tọa độ điểm M trên đường tròn sao cho tam giác MEF có diện tích lớn nhất.

Lời giải

1. $A\left(a;a^3-5a^2+10a-8\right)\in(C)$, $C(-25+7c;c)\in(d)$

$$I\left(-\frac{1}{2};\frac{7}{2}\right)\text{ là trung điểm AC}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{a+(-25+7c)}{2}=-\dfrac{1}{2}\\ \dfrac{\left(a^3-5a^2+10a-8\right)+c}{2}=\dfrac{7}{2}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}c=\dfrac{24-a}{7}\\ (a-3)\left(7a^2-14a+27\right)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=3\Rightarrow A(3;4)\\ c=3\Rightarrow C(-4;3)\end{cases}$$

Gọi $B(x_0;y_0)$, $x_0<0$. Tam giác OAB vuông cân tại A khi $\begin{cases}\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{OA}=0\\ AB=OA\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3(x_0-3)+4(y_0-4)=0\\ (x_0-3)^2+(y_0-4)^2=25\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1;y_0=7\\ x_0=7;y_0=7\end{array}\right.\Rightarrow B(-1;7).$$

2. Đường tròn ngoại tiếp OABC : $\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}$

Từ giả thiết suy ra $E(-1;0)$, $F(0;7)$.

Dễ thấy, EF là đường kính đường tròn, nên tam giác MEF vuông tại M.

$$S_{MEF}=\frac{1}{2}ME.MF\le\frac{ME^2+MF^2}{4}=\frac{EF^2}{4}=\frac{25}{2}.$$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi tam giác MEF vuông cân tại M, khi đó tọa độ M thỏa hệ: $\begin{cases}(x+1)^2+y^2=25\\ \left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{7}{2}\right)^2=\frac{25}{2}\end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l}M(-4;4)\\ M(3;3)\end{array}\right.$

Bài tập tự luyện:

1. Tìm các điểm M trên đồ thị (C): $y=x^4+2x^2-1$ sao cho tiếp tuyến của (C) tại M vuông góc với đường thẳng IM, với $I\left(0;\frac{17}{8}\right)$.

Hướng dẫn giải

Tiếp tuyến d tại $M(x_0;y_0)$ thuộc (C) có hệ số góc là $y_0'=4x_0^3+4x_0$, phương trình có dạng: $y=\left(4x_0^3+4x_0\right)(x-x_0)+x_0^4+2x_0^2-1$ và có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=\left(4x_0^3+4x_0;-1\right)$.

Đường thẳng AM có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AM}=\left(x_0;x_0^4+2x_0^2-\frac{25}{8}\right)$

Đường thẳng d và AM vuông góc nhau khi $\vec{n}$ và $\overrightarrow{AM}$ cùng phương với nhau tức $\left(4x_0^3+4x_0\right)\left(x_0^4+2x_0^2-\frac{25}{8}\right)+x_0=0\Leftrightarrow x_0=0$ hoặc $4\left(x_0^2+1\right)\left[\left(x_0^2+1\right)^2-\frac{33}{8}\right]+1=0$ (*)

Đặt $t=x_0^2+1\ge1$, phương trình (*) trở thành $4t\left(t^2-\frac{33}{8}\right)+1=0$, phương trình này có nghiệm $t=2$ thỏa điều kiện $t\ge1$.

Với $t=2$ tức $x_0^2=1\Leftrightarrow x_0=-1$ hoặc $x_0=1$.

Vậy, có 3 điểm cần tìm $M(-1;2)$, $M(0;-1)$, $M(1;2)$.

2. Tìm tọa độ 2 điểm B, C thuộc 2 nhánh khác nhau của đồ thị $y=\frac{2}{x}$ sao cho tam giác ABC vuông cân tại $A(1;-2)$.

Hướng dẫn giải

Xét $B\left(b;\frac{2}{b}\right)$, $C\left(c;\frac{2}{c}\right)$, $b<0<c$ là 2 điểm thuộc đồ thị $y=\frac{2}{x}$.

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B, C lên đường thẳng $y=-2$, khi đó $H(b;-2)$ và $K(c,-2)$.

Dễ thấy $\widehat{BAH}+\widehat{CAK}=\widehat{CAK}+\widehat{ACK}=90^0\Rightarrow\widehat{BAH}=\widehat{ACK}$ suy ra $\Delta AHB=\Delta CKA$ (cạnh huyền, góc nhọn) $\Rightarrow\begin{cases}AH=CK\\ BH=AK\end{cases}$ hay

$$\begin{cases}(1-b)^2=\left(2+\frac{2}{c}\right)^2\\ \left|2+\frac{2}{b}\right|=|c-1|\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}bc=3c+2\vee bc=-c-2 & (1)\\ \left|2+\frac{2}{b}\right|=|c-1| & (2)\end{cases}$$

* Với $bc=3c+2\Rightarrow b=\frac{3c+2}{c}$ thay vào (2) ta được $\left|\frac{8c+4}{3c+2}\right|=|c-1|$

Suy ra $c^2+3c+2=0$ hoặc $3c^2+7c+2=0$ không thỏa $c>0$.

* Với $bc=-c-2\Rightarrow b=\frac{-c-2}{c}$ thay vào (2) ta được $\left|\frac{4}{c+2}\right|=|c-1|$

Suy ra $c^2+c-6=0\Leftrightarrow c=2$ hoặc $c=-3$ (không thỏa $c>0$)

Vậy, $B(-2;-1)$, $C(2;1)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

3. Tìm các điểm thuộc 2 nhánh khác nhau của (C): $y=\frac{2x+1}{x+1}$ sao cho khoảng cách giữa 2 điểm đó ngắn nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $A\left(a;2-\frac{1}{a+1}\right)$, $B\left(b;2-\frac{1}{b+1}\right)$ với $a<-1$, $b>-1$ là 2 điểm lần lượt thuộc nhánh phải và nhánh trái của đồ thị.

Đặt $u=-1-a>0$, $v=1+b>0$.

$$AB^2=(u+v)^2+\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)^2=(u+v)^2\left[1+\frac{1}{(uv)^2}\right]\ge4uv\left[1+\frac{1}{(uv)^2}\right]$$

Hay $AB^2\ge4uv+\frac{4}{uv}\ge16$

Đẳng thức xảy ra khi : $\begin{cases}u=v\\ 4uv=\frac{4}{uv}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u=v\\ u^2=1\end{cases}\Rightarrow u=v=1$

Vậy, $A(0;1)$, $B(-2;3)$ thì $\min AB=4$.

4. Tìm trên đồ thị (C) : $y=-x^3+3x$ có bao nhiêu bộ bốn điểm A,B,C,D sao cho tứ giác ABCD là hình vuông tâm $O(0;0)$.

Hướng dẫn giải

Giả sử $A\left(a;-a^3+3a\right), B\left(b;-b^3+3b\right)$ với $a \neq b$ và $a,b>0$.

ABCD là hình vuông tâm $O(0;0) \Leftrightarrow \begin{cases} OA \perp OB \\ OA = OB \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0 \\ OA = OB \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} ab+ab\left(a^2-3\right)\left(b^2-3\right)=0 \\ a^2+\left(a^3-3a\right)^2=b^2+\left(b^3-3b\right)^2 \end{cases} \quad (*)$$

Biến đổi và rút gọn $(*)$, ta được : $\begin{cases} a^2b^2-3\left(a^2+b^2\right)+10=0 & (1) \\ \left[\begin{array}{l} a+b=0 \\ \left(a^2+b^2-3\right)^2-a^2b^2+1=0 \quad (2) \end{array}\right. \end{cases}$.

Trường hợp 1 : $a+b=0$ thay vào (1), ta được : $a^4-6a^2+10=0$ (3). Rõ ràng phương trình (3) không có nghiệm thực với $\forall a \in \mathbb{R}$.

Trường hợp 2: Đặt $u=a^2+b^2, v=a^2.b^2$.

Khi đó hệ (1), (2) trở thành : $\begin{cases} v-3u+10=0 \\ (u-3)^2-v+1=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=3u-10 \\ u^2-9u+20=0 \end{cases}$

Giải hệ, ta được $u=4, v=2$ hoặc $u=v=5$.

* $\begin{cases} u=4 \\ v=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=4 \\ a^2.b^2=2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{2-\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2+\sqrt{2}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\sqrt{2+\sqrt{2}} \\ b=\sqrt{2-\sqrt{2}} \end{cases}$.

* $\begin{cases} u=5 \\ v=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+b^2=5 \\ a^2.b^2=5 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \\ b=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a=\sqrt{\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}} \\ b=\sqrt{\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}} \end{cases}$.

Vì vai trò A,B như nhau nên trên (C) có hai bộ bốn điểm A,B,C,D sao cho ABCD là hình vuông có tâm $O(0;0)$.

5. Tìm trên đồ thị (C) của hàm số $y=x^3+3x-2$ cặp điểm đối xứng nhau qua gốc tọa độ $I(2;18)$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M(x_1;y_1), N(x_2;y_2)$ là tọa độ cần tìm. Từ giả thiết, ta suy ra: $\begin{cases} x_1+x_2=4 \\ y_1+y_2=36 \end{cases}$

Vậy, $M(1;2)$, $N(3;34)$

6. Tìm trên đường thẳng $y=3x-2$ điểm M sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 điểm cực trị của đồ thị của hàm số $y=x^3-3x^2+2$ là nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Giả sử điểm cực đại là $A(0;2)$, điểm cực tiểu là $B(2;-2)$.

Ta thấy, A,B nằm về 2 phía đường thẳng $y=3x-2$.

Để $MA+MB$ nhỏ nhất khi 3 điểm A,M,B thẳng hàng và M nằm trong AB, tức tọa độ điểm M là giao điểm của đường thẳng $AB: y=-2x+2$ và đường thẳng $y=3x-2 \Rightarrow M\left(\frac{4}{5};\frac{2}{5}\right)$.

7. Tìm tọa độ điểm M trên đồ thị (C) : $y=\dfrac{2x-1}{x+1}$ sao cho khoảng cách từ điểm $I(-1;2)$ tới tiếp tuyến tại M của đồ thị (C) bằng $\dfrac{3\sqrt{10}}{5}$.

Hướng dẫn giải

Gọi $M\left(x_0;2-\dfrac{3}{x_0+1}\right)$ là tọa độ điểm cần tìm, tiếp tuyến tại M có phương trình:

$$y-2+\frac{3}{x_0+1}=\frac{3}{(x_0+1)^2}(x-x_0) \text{ hay } 3(x-x_0)-(x_0+1)^2(y-2)-3(x_0+1)=0 \quad (t)$$

Khoảng cách từ I đến tiếp tuyến (t) là $d=\dfrac{\left|3(-1-x_0)-3(x_0+1)\right|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}=\dfrac{6|x_0+1|}{\sqrt{9+(x_0+1)^4}}$

$$d=\frac{3\sqrt{10}}{5}=\frac{6}{\sqrt{10}} \Leftrightarrow \sqrt{10}|x_0+1|=\sqrt{9+(x_0+1)^4} \Rightarrow t^2-10t+9=0$$

với $t=(x_0+1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=9$

➭ Chủ đề 4: Tính đơn điệu của hàm số.

1. Điều kiện cần để hàm số đơn điệu:

Giả sử hàm số f có đạo hàm trên khoảng I

- Nếu hàm số f đồng biến trên khoảng I thì $f'(x) \geq 0$ với mọi $x \in I$;
- Nếu hàm số f nghịch biến trên khoảng I thì $f'(x) \leq 0$ với mọi $x \in I$.

2. Điều kiện đủ để hàm số đơn điệu:

Giả sử I là một khoảng hoặc nửa khoảng hoặc một đoạn, f là hàm số liên tục trên I và có đạo hàm tại mọi điểm trong của I (tức là điểm thuộc I nhưng không phải đầu mút của I). Khi đó:

- Nếu $f'(x)>0$ với mọi $x \in I$ thì hàm số f đồng biến trên khoảng I;

- Nếu $f'(x)<0$ với mọi $x\in I$ thì hàm số f nghịch biến trên khoảng I;
- Nếu $f'(x)=0$ với mọi $x\in I$ thì hàm số f không đổi trên khoảng I.

Ví dụ 1. Tìm m để hàm số: $y=\frac{x^2+5x+m^2+6}{x+3}$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$.

Lời giải.

Hàm số đã cho xác định trên $D=\mathbb{R}\setminus\{-3\}$, do đó nó được xác định trên khoảng $(1;+\infty)$.

Ta có: $y'=\frac{x^2+6x+9-m^2}{(x+3)^2}$.

Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ khi và chỉ khi $y'\ge 0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$ tức là $x^2+6x+9-m^2\ge 0,\ \forall x\in(1;+\infty)$ (vì $(x+3)^2>0,\ \forall x>1$) hay $(x+3)^2\ge m^2$ với $\forall x\in(1;+\infty)$.

Xét $g(x)=(x+3)^2$ trên khoảng $(1;+\infty)$ và $g'(x)=2(x+3)$ với $x>1\Rightarrow x+3>4$ tức $g'(x)>8>0$ với $\forall x\in(1;+\infty)$.

$g(x)$ đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$ và $\lim\limits_{x\to 1^+} g(x)=16$, $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$.

Khi đó $m^2\le (x+3)^2,\ \forall x\in(1;+\infty)\Leftrightarrow m^2\le 16$ hay $-4\le m\le 4$.

Chú ý 1:

* *Hàm số $y=f(x,m)$ tăng trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\ge 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \min\limits_{x\in\mathbb{R}} y'\ge 0$.*

* *Hàm số $y=f(x,m)$ giảm trên $\mathbb{R}\Leftrightarrow y'\le 0\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \max\limits_{x\in\mathbb{R}} y'\le 0$.*

Chú ý 2: *Đặt $f(x)=ax^2+bx+c\ (a\ne 0)$.*

- *$f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn : $x_1<\alpha<x_2$. Đặt $t=x-\alpha$, khi đó $g(t)=f(t+\alpha)$. Bài toán trở thành $g(t)=0$ có hai nghiệm trái dấu tức $t_1<0<t_2\Leftrightarrow P<0$.*
- *$f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn : $x_1\le x_2<\alpha$. Đặt $t=x-\alpha$, khi đó $g(t)=f(t+\alpha)$. Bài toán trở thành $g(t)=0$ có hai nghiệm cùng âm nghĩa là $t_1\le t_2<0\Leftrightarrow \Delta\ge 0,\ S<0,\ P>0$.*
- *$f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn $\beta<x_1\le x_2$. Đặt $t=x-\beta$, khi đó $g(t)=f(t+\beta)$. Bài toán trở thành $g(t)=0$ có hai nghiệm cùng dương nghĩa là $0<t_1\le t_2\Leftrightarrow \Delta\ge 0,\ S>0,\ P>0$.*
- *Để $f(x)=0$ có hai nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn:*

$$x_1<\alpha<x_2\Leftrightarrow (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)<0\Leftrightarrow x_1.x_2-\alpha(x_1+x_2)+\alpha^2<0$$

$$\alpha<x_1<x_2\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2>2\alpha\\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\end{cases};\qquad x_1<x_2<\alpha\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta>0\\ x_1+x_2<2\alpha\\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0\end{cases}$$

$\alpha<x_1<x_2<\beta\Leftrightarrow \Delta>0,\ 2\alpha<x_1+x_2<2\beta,\ (x_1-\alpha)(x_2-\alpha)>0,$ $(x_1-\beta)(x_2-\beta)>0$.

☐ **Mở rộng:**

Nhận thấy, với $-4\le m\le 4$ thì hàm số đã cho luôn đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$. Nghĩa là hàm số cũng đồng biến bất kể khoảng hoặc nửa khoảng hay đoạn nào thuộc $(1;+\infty)$. Như vậy, hàm số hiển nhiên đồng biến (đơn điệu tăng) bất kì trên khoảng $(1;2)$ hoặc đoạn $[3;5]$....

Qua đó, bài toán có thể yêu cầu: "Tìm m để hàm số: $y=\frac{x^2+5x+m^2+6}{x+3}$ đồng biến trên đoạn $[2;3]$".... Để hiểu kỹ hơn vấn đề này, bạn đọc làm bài toán sau: "Tìm điều kiện tham số m sao cho hàm số $y=4mx^3-6x^2+(2m-1)x+1$ tăng trên khoảng $(0;2)$".

Ví dụ 2. Tìm m để hàm số: $y=x^3-mx^2+(m+36)x-5$ nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $4\sqrt{2}$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=3x^2-2mx+m+36$ và $\Delta'=m^2-3m-108$

Dễ thấy $a_{y'}=3>0$, do đó hàm số đã cho không nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Nếu $m<-9$ hoặc $m>12$ tức $\Delta'>0$ thì $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1;\ x_2$.

Lập bảng xét dấu, ta thấy $y'<0$ với $x\in(x_1;x_2)$ suy ra hàm số nghịch biến với $x\in[x_1;x_2]$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng có độ dài bằng $4\sqrt{2}$ khi $|x_1-x_2|=4\sqrt{2}$ tức $\left|2\frac{\sqrt{m^2-3m-108}}{3}\right|=4\sqrt{2}$, bình phương hai vế và rút gọn ta được phương trình:

$m^2-3m-180=0\Leftrightarrow m=-12$ hoặc $m=15$ (thỏa điều kiện).

Vậy, với $m=-12$ hoặc $m=15$ yêu cầu bài toán được thỏa mãn.

Bài tập tự luyện:

1. Tìm a để hàm số $y=\frac{1}{3}x^3+ax^2+4x+3$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có $y'=x^2+2ax+4$ và có $\Delta'=a^2-4$

Cách 1: Hàm số đã cho đồng biến trên $\mathbb{R}$ $\Leftrightarrow y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}$ nghĩa là ta luôn có:

$\Delta'=a^2-4\le 0\ \Leftrightarrow -2\le a\le 2$

Cách 2 : Tham khảo cách giải sau, bạn đọc đúc kết gì qua 2 lời giải

Bảng xét dấu Δ'

a	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
Δ'		+	0	−	0	+	

+ Nếu $-2<a<2$ thì $y'>0$ với mọi $x\in\mathbb{R}$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $a=2$ thì $y'=(x+2)^2$, ta có : $y'=0\Leftrightarrow x=-2, y'>0, x\ne -2$. Hàm số y đồng biến trên mỗi nửa khoảng $(-\infty;-2]$ và $[-2;+\infty)$ nên hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Tương tự nếu $a=-2$. Hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$.

+ Nếu $a<-2$ hoặc $a>2$ thì $y'=0$ có hai nghiệm phân biệt x_1,x_2. Giả sử $x_1<x_2$. Khi đó hàm số nghịch biến trên khoảng $(x_1;x_2)$, đồng biến trên mỗi khoảng $(-\infty;x_1)$ và $(x_2;+\infty)$. Do đó $a<-2$ hoặc $a>2$ không thoả mãn yêu cầu bài toán.

Vậy hàm số y đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi và chỉ khi $-2\le a\le 2$.

Chú ý:

1. *Nếu* $y'=ax^2+bx+c$ *thì:*

* $y'\ge 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b=0\\ c\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}a>0\\ \Delta\le 0\end{cases}\end{array}\right.$; * $y'\le 0,\ \forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=b=0\\ c\le 0\end{cases}\\ \begin{cases}a<0\\ \Delta\le 0\end{cases}\end{array}\right.$

2. *Hàm đồng biến trên* $\mathbb{R}$ *thì nó phải xác định trên* $\mathbb{R}$.

2. Tìm m để hàm số: $y=\frac{1}{3}x^3+(2m-1)x^2+(m+1)x+2$ nghịch biến trên khoảng $(0;1)$.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=x^2+2(2m-1)x+m+1$.

Hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;1)$ khi $y'\le 0,\ \forall x\in(0;1)$ hay

$\frac{-x^2+2x}{4x+1}\ge m,\ \forall x\in(0;1)$.

Xét hàm số $g(x)=\frac{-x^2+2x}{4x+1}$ liên tục trên khoảng $(0;1)$.

Ta có: $g'(x)=\frac{-4x^2-2x+2}{(4x+1)^2}$.

$\forall x\in(0;1):\ g'(x)=0\ \Leftrightarrow x=\frac{1}{2},\ g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$

Hơn nữa $\lim\limits_{x\to 0^+} g(x)=0,\ \lim\limits_{x\to 1^-} g(x)=\frac{1}{5}$

Dựa vào bảng biến thiên suy ra $m\le 0$.

↳ Chủ đề 5: Cực trị của hàm số

1. Điều kiện cần để hàm số đạt cực trị:

Định lý 1: Giả sử hàm số f đạt cực trị tại điểm x_0. Khi đó, nếu f có đạo hàm tại điểm x_0 thì $f'(x_0)=0$

2. Điều kiện đủ để hàm số đạt cực trị:

Định lý 2: Giả sử hàm số f liên tục trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0 và có đạo hàm trên các khoảng $(a;x_0)$ và $(x_0;b)$. Khi đó :

* Nếu $\begin{cases}f'(x_0)<0, x\in(a;x_0)\\ f'(x_0)>0, x\in(x_0;b)\end{cases}$ thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Nói một cách khác, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ âm sang dương khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực tiểu tại điểm x_0.

* Nếu $\begin{cases}f'(x_0)>0, x\in(a;x_0)\\ f'(x_0)<0, x\in(x_0;b)\end{cases}$ thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Nói một cách khác, nếu $f'(x)$ đổi dấu từ dương sang âm khi x qua điểm x_0 thì hàm số đạt cực đại tại điểm x_0.

Định lý : Giả sử hàm số f có đạo hàm cấp một trên khoảng $(a;b)$ chứa điểm x_0, $f'(x_0)=0$ và f có đạo hàm cấp hai khác 0 tại điểm x_0.

* Nếu $f''(x_0)<0$ thì hàm số f đạt cực đại tại điểm x_0.

* Nếu $f''(x_0)>0$ thì hàm số f đạt cực tiểu tại điểm x_0.

Ví dụ 1. Tìm tham số $m\in\mathbb{R}$ để hàm số : $y=\frac{x^2+mx+1}{x+m}$ đạt cực tiểu tại $x=1$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định và liên tục trên khoảng $(-\infty;-m)\cup(-m;+\infty)$.

Ta có: $y'=1-\dfrac{1}{(x+m)^2}$ và $y''=\dfrac{1}{(x+m)^3}$.

Hàm số có đạo hàm tại mọi điểm trên khoảng xác định, nên hàm số đạt cực tiểu tại $x=1$ khi thỏa mãn:

Điều kiện cần: $y'(1)=0\Leftrightarrow 1-\dfrac{1}{(1+m)^2}=0\Leftrightarrow m=0;\ m=2$

Điều kiện đủ:

$m=0\Rightarrow y''(1)=1>0\Rightarrow x=1$ là điểm cực tiểu.

$m=2\Rightarrow y''(1)=-1<0\Rightarrow x=1$ là điểm cực đại.

Vậy $m=0$ thỏa yêu cầu bài toán.

Nhận xét: Để ý định lý 3 chỉ phát biểu khi $y''(1)\neq 0$.

Nếu trình bày hàm số đạt cực tiểu tại $x=1\Leftrightarrow\begin{cases}y'(1)=0\\y''(1)>0\end{cases}$ thì lời giải chưa chính xác. Như vậy, để áp dụng được hệ $\begin{cases}y'(1)=0\\y''(1)>0\end{cases}$ ta cần khẳng định $y''(1)>0$.

Chú ý:

* *Hàm số f (xác định trên D) có cực trị $\Leftrightarrow \exists x_0\in D$ thỏa mãn hai điều kiện sau:*

i) Tại đạo hàm của hàm số tại x_0 phải triệt tiêu hoặc hàm số không có đạo hàm tại x_0

ii) $f'(x)$ phải đổi dấu qua điểm x_0 hoặc $f''(x_0)\neq 0$.

* *Nếu $f'(x)$ là một tam thức bậc hai hoặc triệt tiêu và cùng dấu với một tam thức bậc hai thì hàm có cực trị $\Leftrightarrow$ phương trình $f'(x)$ có hai nghiệm phân biệt thuộc tập xác định*

Ví dụ 2. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=x^4+mx^2+6-\dfrac{m^2}{2}$ có 3 cực trị $A\in Oy$, B, C sao cho:

1. Tam giác ABC vuông tại A
2. Diện tích tam giác ABC bằng 32
3. Diện tích tứ giác OABC bằng 52
4. Tứ giác ABOC là hình bình hành.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=2x(2x^2+m)$

Nếu $m=0$ thì $y'=4x^3\Rightarrow$ hàm số cho chỉ có 1 cực trị.

Nếu $m>0$ thì $2x^2+m>0\Rightarrow$ hàm số cho chỉ có 1 cực trị.

Nếu $m<0$ thì $2x^2+m=0$ có hai nghiệm phân biệt khác 0, do đó hàm số đã cho có 3 cực trị.

Vậy, $m<0$ hàm số đã cho có 3 cực trị

$$A\left(0;6-\frac{m^2}{2}\right),\ B\left(-\sqrt{-\frac{m}{2}};6-\frac{3m^2}{4}\right)\text{ và } C\left(\sqrt{-\frac{m}{2}};6-\frac{3m^2}{4}\right).$$

1. **Cách 1:** $\overrightarrow{AB}=\left(-\sqrt{-\dfrac{m}{2}};-\dfrac{m^2}{4}\right)$ và $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{-\dfrac{m}{2}};-\dfrac{m^2}{4}\right)$

Tam giác ABC vuông tại A khi $AB\perp AC$ hay $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$

$$\Leftrightarrow\left(-\sqrt{-\frac{m}{2}}\right)\left(\sqrt{-\frac{m}{2}}\right)+\left(-\frac{m^2}{4}\right)\left(-\frac{m^2}{4}\right)=0\Leftrightarrow \frac{m}{2}\left(\frac{m^3}{8}+1\right)=0,$$

phương trình này có nghiệm $m=-2$ (thỏa $m<0$) hoặc $m=0$ không thỏa .

Vậy, $m=-2$ thỏa đề bài.

Cách 2: Gọi I là trung điểm BC ; do tam giác ABC vuông cân tại A

nên $AI=\dfrac{BC}{2}$ tức $\dfrac{m^2}{4}=\sqrt{-\dfrac{m}{2}}$ hay $\dfrac{m^4}{16}+\dfrac{m}{2}=0\Leftrightarrow\dfrac{m}{2}\left(\dfrac{m^3}{8}+1\right)=0\Rightarrow m=-2$

2. Diện tích tam giác ABC bằng 32 khi và chỉ khi $\dfrac{BC.AI}{2}=32$ hay $\sqrt{-\dfrac{m}{2}}.\dfrac{m^2}{4}=16\ (*)$

Đặt $u=\sqrt{-\dfrac{m}{2}}\Rightarrow m=-2u^2$, khi đó phương trình $(*)$ trở thành

$u^5=32=2^5\Rightarrow u=2$ tức $m=-2(2)^2=-8$ thỏa mãn.

3. Ta có: $OA=\left|6-\dfrac{m^2}{2}\right|$ và $BC=2\sqrt{-\dfrac{m}{2}}$. Diện tích tứ giác OABC bằng 52 khi và chỉ khi $\dfrac{OA.BC}{2}=52$ tức $\left|6-\dfrac{m^2}{2}\right|.2\sqrt{-\dfrac{m}{2}}=104$

Cách 1: Bình phương 2 vế và rút gọn ta được phương trình:

$m^5-24m^3+144m+21632=0$

$\Leftrightarrow(m+8)\left(m^4-8m^3+40m^2-320m+2704\right)=0\Leftrightarrow m=-8$ thỏa mãn,

Dễ dàng chứng minh được với mọi $m<0$ thì

$m^4-8m^3+40m^2-320m+2704=m^2\left(m^2+40\right)-8m\left(m^2+40\right)+2704>0$

Cách 2: $\left|6-\dfrac{m^2}{2}\right|.2\sqrt{-\dfrac{m}{2}}=104\Leftrightarrow\left|12-m^2\right|.\sqrt{-\dfrac{m}{2}}=104\ (*)$

Đặt $t=\sqrt{-\frac{m}{2}},\ t>0$, khi đó $(*)$ trở thành $\left|12-4t^4\right|.t=104\ (**)$

TH1: $0<t\le\sqrt[4]{3}\Rightarrow 12-4t^4>0$, phương trình $(**)$ trở thành $\left(12-4t^4\right).t=104$.

Dễ dàng chứng minh được

$f(t)=\left(12-4t^4\right).t-104<0$ với mọi $t\in\left(0;\sqrt[4]{3}\right]$.

TH2: $t>\sqrt[4]{3}\Rightarrow 12-4t^4<0$, phương trình $(**)$ trở thành $\left(4t^4-12\right).t=104$.

Xét hàm số $f(t)=\left(4t^4-12\right).t-104=4t^5-12t-104$ với $t>\sqrt[4]{3}$, ta có

$$f'(t)=20t^4-12=4\left(5t^4-3\right)$$

Vì $t>\sqrt[4]{3}$ nên $5t^4-3>12\Rightarrow f'(t)>0$, mọi $t>\sqrt[4]{3}$, suy ra $f(t)$ là hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\sqrt[4]{3};+\infty\right)$; hơn nữa $\lim\limits_{x\to\left(\sqrt[4]{3}\right)^+} f(t)<0,\ \lim\limits_{x\to+\infty} f(t)>0\Rightarrow$ đồ thị hàm số $f(t)$ cắt trục hoành tại 1 giao điểm $t\in\left(\sqrt[4]{3};+\infty\right)$ và $f(2)=0$, do đó phương trình $\left(4t^4-12\right).t=104$ có nghiệm duy nhất $t=2$ tức $\sqrt{-\frac{m}{2}}=2$ hay $m=-8$.

4. Tứ giác ABOC là hình bình hành khi và chỉ khi $\overrightarrow{BA}=\overrightarrow{OC}\ (*)$

Ta có: $\overrightarrow{BA}=\left(\sqrt{-\frac{m}{2}};\frac{m^2}{4}\right)$ và $\overrightarrow{OC}=\left(\sqrt{-\frac{m}{2}};6-\frac{3m^2}{4}\right)$

Khi đó $(*)\Leftrightarrow\begin{cases}\sqrt{-\frac{m}{2}}=\sqrt{-\frac{m}{2}}\\ \frac{m^2}{4}=6-\frac{3m^2}{4}\end{cases}\Leftrightarrow m^2=6\Rightarrow m=-\sqrt{6}$ thỏa $m<0$.

Ví dụ 3. Tìm các giá trị của m để đồ thị hàm số $y=x^3+(m+1)x^2-4mx$ có cực đại, cực tiểu sao cho trung điểm của đoạn thẳng nối 2 điểm này thuộc đường thẳng $2x-3y=0$.

Lời giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=-x^2+2(m+1)x-4m$ có $\Delta_{y'}=(m-1)^2$

Ta thấy $m\ne1$ thì $\Delta_{y'}>0\Rightarrow y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt, hay hàm số có cực đại cực tiểu.

Gọi $A\left(2;\frac{4}{3}-4m\right),\ B\left(2m;\frac{4}{3}m^3-4m^2\right)$ là 2 điểm cực trị và

$I\left(m+1;\frac{2}{3}m^3-2m^2-2m+\frac{2}{3}\right)$ là tọa độ trung điểm của AB.

Do $I\in 2x-3y=0\Leftrightarrow m\left(m^2-3m-4\right)=0\Leftrightarrow m\in\{-4;-1;0\}$

Vậy, $m\in\{-4;-1;0\}$ là giá trị cần tìm.

Bài tập tự luyện:

1. Tìm m để hàm số $y=(m+2)x^3+3x^2+mx-5$ có cực đại, cực tiểu có hoành độ là các số dương.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho có các điểm cực đại, cực tiểu có hoành độ là các số dương khi và chỉ khi phương trình: $y'=3(m+2)x^2+6x+m=0$ có 2 nghiệm dương phân biệt, nghĩa là ta luôn có: $\begin{cases}a=(m+2)\ne0\\ \Delta'=9-3m(m+2)>0\\ P=\frac{m}{3(m+2)}>0\\ S=\frac{-3}{m+2}>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=-m^2-2m+3>0\\ m<0\\ m+2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-3<m<1\\ m<0\\ m<-2\end{cases}\Leftrightarrow -3<m<-2$$

Vậy, $-3<m<-2$ là giá trị cần tìm thỏa mãn đề bài.

2. Tìm m để $y=-x^4+4mx^2-4m$ có 3 cực trị là 3 đỉnh của 1 tam giác nhận điểm $H\left(0;\frac{31}{4}\right)$ làm trực tâm.

Hướng dẫn giải

$y'=-4x\left(x^2-2m\right)$

$m\le0\Rightarrow y'=0$ có 1 nghiệm, nên hàm số có 1 cực trị.

$m>0\Rightarrow y'=0$ có 3 nghiệm phân biệt và đổi dấu qua mỗi nghiệm đó, nên hàm số có 3 cực trị $A(0;-2m),\ B\left(-\sqrt{2m};4m^2-4m\right),\ C\left(\sqrt{2m};4m^2-4m\right)$

Vì tam giác ABC cân tại A và B,C đối xứng nhau qua Oy

H là trực tâm tam giác ABC khi $\begin{cases}AH\perp BC\\ BH\perp AC\end{cases}\Rightarrow\overrightarrow{BH}.\overrightarrow{AC}=0\ (*)$.

Ta có: $\overrightarrow{BH}=\left(\sqrt{2m};-4m^2+4m+\frac{31}{4}\right)$, $\overrightarrow{AC}=\left(\sqrt{2m};4m^2\right)$.

Khi đó $(*)\Leftrightarrow 2m+4m^2\left(-4m^2+4m+\frac{31}{4}\right)=0$ hay $8m^3-8m^2-\frac{31}{2}m-1=0$,

phương trình có nghiệm $m=2$ thỏa $m>0$

3. Giả sử đồ thị $y=x^4-2\left(m^2+1\right)x^2+3$ có 3 cực trị $A,\ B,\ C$. Tìm m để đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1.

Hướng dẫn giải

Hàm số đã cho xác định trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $y'=4x\left(x^2-m^2-1\right)$.

Dễ thấy, $\forall m\in\mathbb{R}$ thì $y'=0$ có 3 nghiệm $x=0$ hoặc $x=-\sqrt{m^2+1}$ hoặc $x=\sqrt{m^2+1}$ nên đồ thị hàm số có 3 cực trị.

Giả sử $A(0;3)$, $B\left(-\sqrt{m^2+1};3-\left(m^2+1\right)^2\right)$, $C\left(\sqrt{m^2+1};3-\left(m^2+1\right)^2\right)$

Ta có: $AB=AC=\sqrt{\left(m^2+1\right)^4+m^2+1}$, $BC=2\sqrt{m^2+1}$, I là trung điểm BC

$\Rightarrow AI=\left(m^2+1\right)^2$.

Diện tích tam giác ABC: $\frac{1}{2}.BC.AI=\frac{1}{2}(AB+AC+BC)r$ với r là bán kính đường tròn nội tiếp tam giác ABC.

$$r=1\Leftrightarrow\frac{\left(m^2+1\right)^2\sqrt{m^2+1}}{\sqrt{\left(m^2+1\right)^4+m^2+1}+\sqrt{m^2+1}}=1 \text{ hay } \left(m^2+1\right)^2=1+\sqrt{\left(m^2+1\right)^3+1}\ (*)$$

Đặt $t=m^2+1$.

Phương trình $(*)$ viết lại: $t^2=1+\sqrt{1+t^3}\Leftrightarrow\begin{cases}t^2-1\ge 0\\ \left(t^2-1\right)^2=1+t^3\end{cases}\Rightarrow t=2$

Với $t=2$ tức $m^2+1=2\Leftrightarrow m=\pm 1$.

4. Giả sử đồ thị $y=x^4-2mx^2+m$ có 3 cực trị $A,\ B,\ C$. Tìm m để đường tròn nội tiếp tam giác ABC có bán kính bằng 1.

Hướng dẫn giải

$m>0$ thì đồ thị hàm số có 3 cực trị

$A(0;m)$, $B\left(-\sqrt{m},-m^2+m\right)$, $C\left(\sqrt{m};-m^2+m\right)$.

Giải như bài 3, ta tìm được $m=2$.

5. Tìm các giá trị của tham số m để đồ thị (C_m) của hàm số $y=-x^3+3x^2+3m(m+2)x+1$ có 2 điểm cực trị A,B mà độ dài $AB=2\sqrt{5}$.

Hướng dẫn giải

Ta có: $y'=-3x^2+6x+3m(m+2)$.

Đồ thị (C_m) của hàm số có 2 điểm cực trị A,B khi và chỉ khi $y'=0$ có 2 nghiệm phân biệt $x_1,x_2\Leftrightarrow\Delta'=9(m+1)^2>0\Leftrightarrow m\neq-1$.

Ta thấy, $y=\frac{1}{3}(x-1)y'+2(m+1)^2x+(m+1)^2$ và do $y'(x_1)=y'(x_2)=0$

nên suy ra $y(x_1)=2(m+1)^2x_1+(m+1)^2$, $y(x_2)=2(m+1)^2x_2+(m+1)^2$.

Ta có: $A\left(x_1;2(m+1)^2x_1+(m+1)^2\right)$, $B\left(x_2;2(m+1)^2x_2+(m+1)^2\right)$

Suy ra $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+4(m+1)^4(x_2-x_1)^2}$

$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2\left[4(m+1)^4+1\right]^2}=\sqrt{\left[(x_2+x_1)^2-4x_1.x_1\right]\left[4(m+1)^4+1\right]^2}$$

$$=\sqrt{\left[4+4m(m+2)\right]\left[4(m+1)^4+1\right]}=2\sqrt{(m+1)^2\left[4(m+1)^4+1\right]}$$

$AB=2\sqrt{5}\Leftrightarrow\sqrt{(m+1)^2\left[4(m+1)^4+1\right]}=\sqrt{5}\Leftrightarrow(m+1)^2\left[4(m+1)^4+1\right]=5$.

Đặt $t=(m+1)^2\ge 0\Rightarrow t\left(4t^2+1\right)=5\Leftrightarrow 4t^3+t-5=0$

$\Leftrightarrow(t-1)\left[(t+1)^2+1\right]=0\Leftrightarrow t=1$

Với $t=1\Rightarrow(m+1)^2=1\Leftrightarrow m=-2$ hoặc $m=0$ thỏa đề bài.

6. Cho hàm số: $y=x^3+3x^2-(m+1)x+2$ có đồ thị là (C_m). Tìm m để hàm số có cực đại, cực tiểu đồng thời đường thẳng nối cực đại, cực tiểu của hàm số tạo với đường thẳng $y=2x+3$ một góc 45^0.

Hướng dẫn giải

$m>-4$ thì đồ thị của hàm số có cực đại, cực tiểu.

Khi đó $y=\frac{1}{3}(x+1)y'-\frac{2}{3}(m+4)x+\frac{1}{3}(m+7)$. Do các hoành độ cực trị là nghiệm của $y'=0$ nên các điểm cực trị có tọa độ thỏa mãn đường thẳng $y=-\frac{2}{3}(m+4)x+\frac{1}{3}(m+7)$.

Từ giả thiết, suy ra $m=-\frac{19}{6}$ hoặc $m=\frac{9}{2}$

Chuyên đề II

PHƯƠNG TRÌNH LƯỢNG GIÁC

Trong chủ đề lượng giác, tác giả không trình bày những dạng toán giảm tải của chương trình như: " phương pháp đánh giá, dùng bất đẳng thức để giải, chuyển đổi phương trình về dạng hệ phương trình, bất phương trình lượng giác, hệ phương trình lượng giác, hệ bất phương trình lượng giác...".

Để giỏi phương trình lượng giác, các em cần:

1. ***Nắm vững các công thức lượng giác;***
2. ***Chia phương trình lượng giác ra thành từng loại và rèn luyện từng phần;***
3. ***Giải nhiều bài tập để rút kinh nghiệm.***

Dạng 1. Phương trình lượng giác cơ bản

1. $\cos u = \cos v \Leftrightarrow u = \pm v + k2\pi$
2. $\sin u = \sin v \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v + k2\pi \\ u = \pi - v + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow u = (-1)^k v + k\pi$
3. $\tan u = \tan v \Leftrightarrow u = v + k\pi$
4. $\cot u = \cot v \Leftrightarrow u = v + k\pi$

Một số trường hợp đặc biệt:

* $\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

* $\cos x = 1 \Leftrightarrow x = k2\pi$

* $\cos x = -1 \Leftrightarrow x = \pi + k2\pi$

* $\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

* $\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{4} + k\pi$

* $\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

* $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

* $\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

* $\sin x = -1 \Leftrightarrow x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi$

* $\cot x = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

* $\cot x = -1 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$

* $\cot x = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$

Ví dụ 1. Giải phương trình: $2\sin\left(2x + \dfrac{\pi}{6}\right) + 4\sin x = 1$

Lời giải

Phương trình cho tương đương với $\sqrt{3}\sin 2x + \cos 2x + 4\sin x - 1 = 0$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}\sin x\cos x - 2\sin^2 x + 4\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\left(\sqrt{3}\cos x - \sin x + 2\right)\sin x = 0$

Khi $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi$

Khi $\sin x - \sqrt{3}\cos x = 2 \Leftrightarrow \sin\left(x - \dfrac{\pi}{3}\right) = 1 \Leftrightarrow x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = k\pi,\ x = \dfrac{5\pi}{6} + k2\pi$

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\cos 3x + \sin 2x = \sqrt{3}(\sin 3x + \cos 2x)$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương với: $\cos 3x - \sqrt{3}\sin 3x = \sqrt{3}\cos 2x + \sin 2x$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 3x - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 3x = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x + \frac{1}{2}\sin 2x \Leftrightarrow \cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3x + \dfrac{\pi}{3} = 2x + \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ 3x + \dfrac{\pi}{3} = -2x - \dfrac{\pi}{6} + k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi \\ x = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5} \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = -\dfrac{\pi}{10} + \dfrac{k2\pi}{5},\ x = -\dfrac{\pi}{6} + k2\pi$

Ví dụ 3. Giải phương trình: $\dfrac{\cos^2 x.(\cos x - 1)}{\sin x + \cos x} = 2(1 + \sin x).$

Lời giải

Điều kiện: $\sin x + \cos x \neq 0$

Phương trình đã cho tương đương:

$$\left(1 - \sin^2 x\right)(\cos x - 1) = 2(1 + \sin x)(\sin x + \cos x)$$

$$\Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos x + \sin x + \sin x.\cos x) = 0 \Leftrightarrow (1 + \sin x)(1 + \cos x)(1 + \sin x) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ \cos x = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi \\ x = \pi + m2\pi \end{array}\right. \quad (k, m \in \mathbb{Z}),\ \text{thỏa điều kiện bài toán.}$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = -\dfrac{\pi}{2} + k2\pi,\ x = \pi + m2\pi$

Ví dụ 4. Giải phương trình: $\cot x - \cot 2x = \tan x + 1$

Lời giải.

Điều kiện: $\begin{cases} \cos x \neq 0 \\ \sin x \neq 0 \\ \sin 2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\dfrac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$

Phương trình đã cho tương đương : $\dfrac{\cos x}{\sin x} - \dfrac{\cos 2x}{\sin 2x} = \dfrac{\sin x}{\cos x} + 1$

$\Leftrightarrow 2\cos^2 x - \cos 2x = 2\sin^2 x + \sin 2x \Leftrightarrow 2\left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) - \cos 2x = \sin 2x$

$\Leftrightarrow \cos 2x = \sin 2x \Leftrightarrow \tan 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$ thỏa điều kiện.

Vậy, nghiệm phương trình là: $x = \frac{\pi}{8} + k\frac{\pi}{2}$

Dạng 2. Phương trình lượng giác

Nhận thấy, phương trình có $\sin x.\cos x$ và $\sin x \pm \cos x$ chúng ta đặt

$$t = \sin x \pm \cos x$$

Ví dụ. Giải phương trình:

$$\sin x + \sin^2 x + \sin^3 x + \sin^4 x = \cos x + \cos^2 x + \cos^3 x + \cos^4 x$$

Lời giải

Phương trình đã cho tương đương:

$$(\sin x - \cos x).\left[2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x.\cos x\right] = 0$$

Khi $\sin x - \cos x = 0 \Leftrightarrow \tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi$

Khi $2 + 2(\sin x + \cos x) + \sin x.\cos x = 0$ (*). Đặt $t = \sin x + \cos x$, $t \in \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Phương trình (*) trở thành: $t^2 + 4t + 3 = 0 \Leftrightarrow t = -3 \notin \left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ hoặc $t = -1$

Với $t = -1$ tức $\sin x + \cos x = -1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\cos\frac{\pi}{4} = \cos\frac{3\pi}{4}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4} + m2\pi \\ x - \frac{\pi}{4} = \pi - \frac{3\pi}{4} + m2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = \pi + m2\pi \\ x = \frac{\pi}{2} + m2\pi \end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$, $x = \frac{\pi}{2} + m2\pi$, $x = \pi + m2\pi$, $k, m \in \mathbb{Z}$.

Dạng 3. Phương trình bậc hai dạng lượng giác

$a\cos^2 x + b\cos x + c = 0$ $\qquad$ $a\tan^2 x + b\tan x + c = 0$

$a\sin^2 x + b\sin x + c = 0$ $\qquad$ $a\cot^2 x + b\cot x + c = 0$

Ví dụ 1. Giải phương trình: $\frac{1 - \cos x(2\cos x + 1) - \sqrt{2}\sin x}{1 - \cos x} = 1$

Lời giải

Điều kiện: $\cos x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq k2\pi$

Phương trình đã cho tương đương : $1 - 2\cos^2 x - \cos x - \sqrt{2}\sin x = 1 - \cos x$

$$\Leftrightarrow -2\left(1 - \sin^2 x\right) - \sqrt{2}\sin x = 0 \Leftrightarrow 2\sin^2 x - \sqrt{2}\sin x - 2 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \sin x$, $t \in [-1;1] \setminus \{0\}$

Phương trình (*) trở thành: $2t^2 - \sqrt{2}t - 2 = 0 \Leftrightarrow t = \sqrt{2}$ hoặc $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

Với $t = -\frac{1}{\sqrt{2}}$ tức $\sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -\frac{\pi}{4} + m2\pi \\ x = \frac{5\pi}{4} + m2\pi \end{array}\right.$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = -\frac{\pi}{4} + m2\pi$, $x = \frac{5\pi}{4} + m2\pi$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $\frac{2\cos 4x + 6\cos^2 x + 1 + 3\cos 2x}{\cos x} = 0$

Lời giải.

Điều kiện: $\cos x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$

Phương trình đã cho tương đương : $\frac{2\cos 4x + 6\cos^2 x + 1 + 3\cos 2x}{\cos x} = 0$

$$\Leftrightarrow 2\left(2\cos^2 2x - 1\right) + 3(1 + \cos 2x) + 1 + 3\cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 2x - 3\cos 2x + 1 = 0 \quad (*)$$

Đặt $t = \cos 2x$, $t \in [-1;1] \setminus \{0\}$

Phương trình (*) trở thành: $2t^2 - 3t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ hoặc $t = \frac{1}{2}$

Khi $t = \frac{1}{2}$ tức $\cos 2x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \pm\frac{\pi}{6} + m\pi$

Khi $t = 1$ tức $\cos 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{n\pi}{2}$

Đối chiếu điều kiện, ta được $x = p\pi$, $x = \pm\frac{\pi}{6} + m\pi$, $p, m \in \mathbb{Z}$.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = \pm\frac{\pi}{6} + m\pi, x = p\pi$

Dạng 4. Phương trình lượng giác về dạng tích

Với dạng toán này, thường quy về dạng $A.B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ hoặc $B = 0$

Ví dụ. Giải phương trình: $\sqrt{3}\sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(5x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

Lời giải

Ta thấy, $\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$ nên phương trình cho viết lại:

$$\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)+2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow 2\left[\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\frac{\pi}{6}+\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\frac{\pi}{6}\right]+2\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(5x+\frac{\pi}{6}\right)=0 \Leftrightarrow 2\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin\left(3x-\frac{\pi}{6}\right)=0\\ \cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3} & k\in\mathbb{Z}\\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{l\pi}{2} & l\in\mathbb{Z}\end{array}\right.$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{18}+\frac{k\pi}{3},\ x=\frac{\pi}{12}+\frac{l\pi}{2}$.

Dạng 5. Phương trình lượng giác bậc nhất

$$a\sin x+b\cos x=c, a\neq 0, b\neq 0 (*)$$

Ví dụ. Giải phương trình: $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$

Lời giải

$\sin^4 x+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 4-2\sin^2 2x+\sqrt{3}\sin 4x=2$

$$\cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=-\frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos 4x.\cos\frac{\pi}{3}+\sin 4x.\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2}=\cos\frac{2\pi}{3}$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2} \text{ hoặc } x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}.$$

Dạng 6. Phương trình lượng giác đẳng cấp bậc hai

Ví dụ. Giải phương trình: $\cos^3 x+\sin^3 x=2\left(\cos^5 x+\sin^5 x\right)$

Lời giải

Nhận thấy $\cos x=0$ không là nghiệm của phương trình nên chia hai vế của phương trình cho $\cos^5 x\neq 0$

Ta được: $1+\tan^2 x+\tan^3 x(1+\tan^2 x)=2\left(1+\tan^5 x\right)$

$$\Leftrightarrow \tan^5 x-\tan^3 x-\tan^2 x+1=0 \Leftrightarrow \left(\tan^2 x-1\right)\left(\tan^3 x-1\right)=0$$

$$\Rightarrow \tan x=\pm 1 \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi.$$

MỘT SỐ VÍ DỤ TRỌNG TÂM

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

1. $\frac{1}{2}\tan^2 x-\frac{2}{\cos x}+\frac{5}{2}=0$ **2.** $\left(\sin 2x+\sqrt{3}\cos 2x\right)^2-5=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

1. Điều kiện: $\cos x\neq 0 \Leftrightarrow x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$

Phương trình đã cho được viết lại: $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)-\frac{2}{\cos x}+\frac{5}{2}=0$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 x}-\frac{4}{\cos x}+4=0 \Leftrightarrow \left(\frac{1}{\cos x}-2\right)^2=0 \Leftrightarrow \cos x=\frac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{3}+2k\pi$$

2. Phương trình đã cho được viết lại: $4\left(\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2x\right)^2-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-5=0$

$$\Leftrightarrow 4\cos^2\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)-5=0\ (*) \text{ Đặt } t=\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right),\ -1\le t\le 1$$

Phương trình $(*)$ trở thành: $4t^2-t-5=0 \Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=\frac{5}{4}\notin[-1;1]$

Với $t=-1$ tức $\cos\left(2x-\frac{\pi}{2}\right)=-1 \Leftrightarrow 2x-\frac{\pi}{6}=\pi+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

1. $\tan^2 x-\tan x.\tan 3x=2$ **2.** $2\tan x+\cot x=\sqrt{3}+\frac{2}{\sin 2x}$

Lời giải

1. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x\neq 0\\ \cos 3x\neq 0\end{cases}$

Phương trình đã cho được viết lại:

$$\tan x(\tan x-\tan 3x)=2 \Leftrightarrow \frac{-\sin x\sin 2x}{\cos x\cos x\cos 3x}=2 \Leftrightarrow \frac{-2\sin^2 x\cos x}{\cos x\cos x\cos 3x}=2$$

$$\Leftrightarrow -\sin^2 x=\cos x\cos 3x \Leftrightarrow \cos^2 x-1=4\cos^4 x-3\cos^2 x \Leftrightarrow 4\cos^4 x-4\cos^2 x+1=0$$

$\Leftrightarrow \left(2\cos^2 x-1\right)^2=0 \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow 2x=\frac{\pi}{2}+k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ (thỏa điều kiện).

2. Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Phương trình đã cho được viết lại: $\frac{2\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=\sqrt{3}+\frac{1}{\sin x\cos x}$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x+\cos^2 x=\sqrt{3}\sin x\cos x+1 \Leftrightarrow 1+\sin^2 x=\sqrt{3}\sin x\cos x+1$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=\sqrt{3}\sin x\cos x \Leftrightarrow \sin x\left(\sqrt{3}\cos x-\sin x\right)=0 \Rightarrow \sin x=\sqrt{3}\cos x$

(do điều kiện)

$\Leftrightarrow \tan x=\sqrt{3} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k\pi$

Ví dụ 3. Giải các phương trình:

1. $\sin 2x+4(\cos x-\sin x)=4$ **2.** $\tan x+2\cot 2x=\sin 2x$

Lời giải

1. Phương trình đã cho tương đương: $(1-\sin 2x)-4(\cos x-\sin x)+3=0$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)^2-4(\cos x-\sin x)+3=0$ $(*)$. Đặt $t=\cos x-\sin x,\ \ t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

Phương trình $(*)$ trở thành: $t^2-4t+3=0,\ t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right] \Leftrightarrow t=1$

Với $t=1 \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1 \Leftrightarrow \cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$ hoặc $x=2k\pi$

2. Điều kiện: $\sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$. Đặt $t=\tan x$

Phương trình đã cho trở thành:

$$t+2.\frac{1-t^2}{2t}=\frac{2t}{1+t^2} \Leftrightarrow \frac{1}{t}=\frac{2t}{1+t^2} \Leftrightarrow t^2=1 \Leftrightarrow \tan^2 x=1$$

$\Leftrightarrow \sin^2 x=\cos^2 x \Leftrightarrow \cos 2x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ thỏa điều kiện.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2},\ (k\in\mathbb{Z})$

Ví dụ 4. Giải các phương trình:

1. $\tan^2 x+\cot^2 x+2(\tan x+\cot x)=6$ **2.** $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$

Lời giải

1. Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$

Phương trình đã cho viết lại: $(\tan x+\cot x)^2+2(\tan x+\cot x)-8=0$ $(*)$

Đặt $t=\tan x+\cot x$, phương trình $(*)$ trở thành:

$$t^2+t-8=0 \Leftrightarrow t=-4 \text{ hoặc } t=2$$

Với $t=-4 \Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=-4 \Leftrightarrow \sin^2 x+\cos^2 x=-4\sin x\cos x \Leftrightarrow -2\sin 2x=1$

$$\Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2}=\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=-\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ 2x=\frac{7\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{12}+k\pi \\ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi \end{array}\right.\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

Với $t=2 \Leftrightarrow \tan x+\frac{1}{\tan x}=2 \Leftrightarrow \tan^2 x-2\tan x+1=0$

$$\Leftrightarrow (\tan x-1)^2=0 \Leftrightarrow \tan x=1=\tan\frac{\pi}{4} \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi\ \ (k\in\mathbb{Z})$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi,\ \ x=-\frac{\pi}{12}+k\pi,\ \ x=\frac{7\pi}{12}+k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$

2. Điều kiện: $\sin x\cos x \neq 0 \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}\ \ (k\in\mathbb{Z})$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sin x+\cos x}{\sin x\cos x}$

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\sin x\cos x}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ 2=\frac{1}{\sin x\cos x} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ 2\sin x\cos x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=0 \\ \sin 2x=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-\frac{\pi}{4}+k\pi \Rightarrow \sin 2x=\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=-1\neq 0 \\ 2x=\frac{\pi}{2}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\pm\frac{\pi}{4}+k\pi$

Ví dụ 5. Giải các phương trình:

1. $2\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sin x}+\frac{1}{\cos x}$.

2. $\frac{4\cos^3 x+2\cos^2 x(2\sin x-1)-\sin 2x-2(\sin x+\cos x)}{2\sin^2 x-1}=0$

Lời giải

1. Điều kiện: $\begin{cases}\cos x \neq 0\\ \sin x \neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \sin 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{k\pi}{2}$

Phương trình đã cho được viết lại:

$$2(\sin x + \cos x) = \frac{\sin x + \cos x}{\sin x \cos x} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x + \cos x = 0\\ \sin 2x = 1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\tan x = -1\\ \sin 2x = 1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\\ 2x = \frac{\pi}{2} + 2m\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + k\pi\\ x = \frac{\pi}{4} + m\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{n\pi}{2}$$

2. Điều kiện: $2\sin^2 x - 1 \neq 0 \Leftrightarrow \cos 2x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$

Phương trình cho viết lại:

$$4\cos^2 x(\sin x + \cos x) - 2\cos x(\sin x + \cos x) - 2(\sin x + \cos x) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2(\sin x + \cos x)(\cos x - 1)(2\cos x + 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = -\frac{\pi}{4} + m\pi\\ x = m2\pi\\ x = \pm\frac{2\pi}{3} + m2\pi\end{array}\right., m \in \mathbb{Z}$$

Đối chiếu điều kiện, ta được nghiệm: $x = \frac{m2\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$.

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x = \frac{m2\pi}{3}, m \in \mathbb{Z}$

Ví dụ 6. Giải các phương trình: $\tan 3x - 2\tan 4x + \tan 5x = 0$, với $x \in (0; 2\pi)$.

Lời giải

Điều kiện: $\cos 3x \neq 0,\ \cos 4x \neq 0,\ \cos 5x \neq 0$

Phương trình đã cho được viết lại: $\frac{\sin 8x}{\cos 3x \cos 5x} - \frac{2\sin 4x}{\cos 4x} = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\sin 4x \cos 4x}{\cos 3x \cos 5x} - \frac{2\sin 4x}{\cos 4x} = 0 \Leftrightarrow 2\sin 4x\left(\frac{\cos^2 4x - \cos 3x \cos 5x}{\cos 3x \cos 4x \cos 5x}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\sin 4x.\sin^2 x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 4x = 0\\ \sin x = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}4x = k\pi\\ x = k\pi\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = k\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = k\frac{\pi}{4}\ (*)\\ x = k\pi\end{array}\right.$$

$(*)$ chấp nhận khi thỏa $x \in (0; 2\pi)$, từ đây ta tìm được $k \in \{1,3,4,5,7\}$

Vậy, nghiệm của phương trình đã cho là: $x_1 = \frac{\pi}{4}, x_2 = \frac{3\pi}{4}, x_3 = \pi, x_4 = \frac{5\pi}{4}, x_5 = \frac{7\pi}{4}$

Bài tập tự luyện

Bài tập 1: Giải các phương trình:

1. $(2\sin x - 1)(2\sin 2x + 1) = 3 - 4\cos^2 x \quad (1)$
2. $\tan 2x + \cot x = 8\cos^2 x \quad (2)$
3. $16\cos x \cos 2x \cos 4x \cos 8x = 1 \quad (3)$
4. $4\sin 2x - 3\cos 2x = 3(4\sin x - 1) \quad (4)$
5. $3\sin 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 + 4\sin^3 3x \quad (5)$
6. $2\cos^3 x + \cos 2x + \sin x = 0 \quad (6)$
7. $\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x = 0 \quad (7)$
8. $8\left(\cos 3x \cos^3 x - \sin 3x \sin^3 x\right) = 2 - 3\sqrt{2} \quad (8)$
9. $5(1 + \cos x) = 2 + \sin^4 x - \cos^4 x \quad (9)$
10. $\sin 2x + 2\cos 2x = 1 + \sin x - 4\cos x \quad (10)$
11. $9\sin x + 6\cos x + \cos 2x - 3\sin 2x = 8 \quad (11)$

Hướng dẫn giải

1. (1) $\Leftrightarrow 2\sin x \sin 2x + 2\sin x - 2\sin 2x - 1 = 3 - 4\left(1 - \sin^2 x\right)$

$\Leftrightarrow 8\sin^2 x \cos x + 2\sin x - 4\sin x \cos x = 4\sin^2 x$

$\Leftrightarrow 4\sin x \cos x + 1 - 2\cos x = 2\sin x$

hoặc $\sin x = 0 \Leftrightarrow 4\sin x \cos x - 2(\sin x + \cos x) + 1 = 0$ hoặc $\sin x = 0$.

2. (2) $\Leftrightarrow \frac{\sin 2x}{\cos 2x} + \frac{\cos x}{\sin x} = 8\cos^2 x \Leftrightarrow \cos x = 8\cos^2 x \cos 2x \sin x$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ hoặc $x = \frac{\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$ hoặc $x = \frac{5\pi}{24} + \frac{k\pi}{2}$.

3. (3) Vì $\sin x = 0$ không là nghiệm của phương trình. Với $\sin x \neq 0$, nhân 2 vế phương trình cho $\sin x$, dẫn đến phương trình:

$\sin 16x = \sin x \Leftrightarrow x = \frac{2k\pi}{15}$ hoặc $x = \frac{\pi}{17} + \frac{2k\pi}{17}$

4. (4) $\Leftrightarrow 8\sin x \cos x - 3\left(1 - 2\sin^2 x\right) = 12\sin x - 3 \Leftrightarrow \sin x(4\cos x + 3\sin x - 6) = 0$

5. (5) $\Leftrightarrow 3\sin 3x - 4\sin^3 3x - \sqrt{3}\cos 9x = 1 \Leftrightarrow \sin 9x - \sqrt{3}\cos 9x = 1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 9x - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 9x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sin\left(9x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9}$

$\Leftrightarrow x = \frac{\pi}{18} + k\frac{2\pi}{9}$ hoặc $x = \frac{7\pi}{54} + k\frac{2\pi}{9}$

6. (6) $\Leftrightarrow 2\cos^3 x + 2\cos^2 x - 1 + \sin x = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 x(1 + \cos x) - (1 - \sin x) = 0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(\cos x+\sin x)(\cos x+\sin x+2)=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$ hoặc $x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

7. (7) $\Leftrightarrow (\sin 6x+\sin x)+(\sin 5x+\sin 2x)+(\sin 4x+\sin 3x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin\frac{7x}{2}\left[\left(\cos\frac{5x}{2}+\cos\frac{x}{2}\right)+\cos\frac{3x}{2}\right]=0 \Leftrightarrow 4\sin\frac{7x}{2}\cos\frac{3x}{2}(2\cos x+1)=0$

8. (8) $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos^2 x(\cos 4x+\cos 2x)-\frac{1}{2}\sin^2 x(\cos 2x-\cos 4x)=\frac{2-3\sqrt{2}}{8}$

$\Leftrightarrow \cos 4x\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)+\cos 2x\left(\cos^2 x-\sin^2 x\right)=\frac{2-3\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos^2 2x=\frac{2-3\sqrt{2}}{4}$

$\Leftrightarrow 4\cos 4x+2(1+\cos 4x)=2-3\sqrt{2} \Leftrightarrow \cos 4x=\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x=\pm\frac{\pi}{16}+\frac{k\pi}{2}$

9. (9) $\Leftrightarrow 3+5\cos x=\sin^2 x-\cos^2 x \Leftrightarrow 2\cos^2 x+5\cos x+2=0$

10. (10) $\Leftrightarrow \sin x(2\cos x-1)+2\left(2\cos^2 x-1\right)+4\cos x-1=0 \Leftrightarrow 2\cos x-1=0$

11. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 9\sin x+6\cos x+2\cos^2 x-1-6\sin x\cos x=8$

$\Leftrightarrow 9(\sin x-1)+6\cos x(1-\sin x)+2\left(1-\sin^2 x\right)=0$

$\Leftrightarrow (1-\sin x)(2\sin x+6\cos x-7)=0$

$\Leftrightarrow \sin x=1$ hoặc $2\sin x+6\cos x-7=0$ (không thỏa)

Với $\sin x=1 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

Vậy, nghiệm của phương trình là: $x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$

Bài tập 2: Giải các phương trình:

1. $\tan x=\operatorname{cog}x+2\cot^3 2x$

2. $9\sin x+6\cos x-3\sin 2x+\cos 2x=8$

3. $(1-\tan x)(1+\sin 2x)=1+\tan x$

4. $\cos 4x-\sin x=\sin 7x-\cos 2x$

5. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-2x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1$

6. $2\sin x(1+\cos 2x)+\sin 2x=1+2\cos x$

7. $\cos 2x+3\sin 2x+5\sin x-3\cos x=3$

8. $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\sin x\cos x-\sqrt{3}=0$

Hướng dẫn giải

1. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\cos x}{\sin x}=2\cot^3 2x \Leftrightarrow -\frac{2\cos 2x}{\sin 2x}=2\cot^3 2x \Leftrightarrow -\cot 2x=\cot^3 2x$

$\Leftrightarrow \cot 2x=0 \Rightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$

2. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 9\sin x+6\cos x-6\sin x\cos x+1-2\sin^2 x=8$

$\Leftrightarrow 2\sin^2 x-9\sin x+7+6\cos x(\sin x-1)=0 \Leftrightarrow (\sin x-1)(2\sin x+6\cos x-7)=0$

3. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2}{\cos x}=\frac{\cos x+\sin x}{\cos x}$

$\Leftrightarrow (\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x)^2=\cos x+\sin x \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$ hoặc $x=k\pi$.

4. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow \cos 4x+\cos 2x=\sin 7x+\sin x \Leftrightarrow 2\cos 3x\cos x=2\sin 4x\cos 3x$

5. $1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-4x\right)+\sqrt{3}\cos 4x=4\cos^2 x-1 \Leftrightarrow \sin 4x+\sqrt{3}\cos 4x=2\left(2\cos^2 x-1\right)$

$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\sin 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos 4x=\cos 2x \Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{\pi}{6}\right)=\cos 2x$

6. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 2\sin x2\cos^2 x+2\sin x\cos x=1+2\cos x \Leftrightarrow (2\cos x+1)(2\sin x\cos x-1)=0$

7. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (6\sin x\cos x-3\cos x)-\left(2\sin^2 x-5\sin x+2\right)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)(3\cos x-\sin x+2)=0$

8. Với $x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ không là nghiệm phương trình.

$x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi$, chia 2 vế phương trình cho $\cos^2 x$, đưa phương trình về dạng:

$\tan^2 x-\left(\sqrt{3}-1\right)\tan x-\sqrt{3}=0$

Bài tập 3: Giải các phương trình:

1. $4\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2$

2. $2(\cot 2x-\cot 3x)=\tan 2x+\cot 3x$

3. $\cos x.\cos\frac{x}{2}.\cos\frac{3x}{2}-\sin x.\sin\frac{x}{2}.\sin\frac{3x}{2}=\frac{1}{2}$

4. $3\cos x+\cos 2x-\cos 3x+1=2\sin x\sin 2x$

5. $\tan x+\cot x=2(\sin 2x+\cos 2x)$

7. $1+3\tan x=2\sin 2x$

6. $\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\sin 2x}=\frac{1}{\sin 4x}$

Hướng dẫn giải

1. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 4\left(1-\frac{1}{2}\sin^2 2x\right)+\sqrt{3}\sin 4x=2 \Leftrightarrow -2\sin^2 2x+\sqrt{3}\sin 4x=-2$

$\Leftrightarrow \cos 4x+\sqrt{3}\sin 4x=-1 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos 4x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin 4x=-\frac{1}{2} \Leftrightarrow \cos\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)=\cos\frac{2\pi}{3}$

$\Leftrightarrow 4x-\frac{\pi}{3}=\pm\frac{2\pi}{3}+2k\pi \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ hoặc $x=-\frac{\pi}{12}+\frac{k\pi}{2}$

2. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 2\left(\frac{\cos 2x}{\sin 2x}-\frac{\cos 3x}{\sin 3x}\right)=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\cos 3x}{\sin 3x} \Leftrightarrow \frac{2\sin x}{\sin 2x\sin 3x}=\frac{\cos x}{\sin 3x\cos 2x}$

$\Leftrightarrow \frac{2\sin x\left(\cos 2x-\cos^2 x\right)}{\sin 2x\sin 3x\cos 2x}=0 \Leftrightarrow \sin^3 x=0 \Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

3. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cos x(\cos x+\cos 2x)-\frac{1}{2}\sin x(\cos x-\cos 2x)=\frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \cos^2 x+\cos x\cos 2x-\sin x\cos x+\sin x\cos 2x=1$

$\Leftrightarrow \cos 2x(\cos x+\sin x)=\sin x(\cos x+\sin x)$

4. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3t+2t^2-1-4t^3+3t+1=4\left(4-t^2\right)t$, đặt $t=\cos x$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ hoặc $x=\pi+2k\pi$.

5. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow \frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2(\sin 2x+\cos 2x) \Leftrightarrow \frac{1}{\sin x\cos x}=2(\sin 2x+\cos 2x)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{\sin 2x}=2(\sin 2x+\cos 2x) \Leftrightarrow 1=\sin 2x(\sin 2x+\cos 2x) \Leftrightarrow 1=\sin^2 2x+\sin 2x\cos 2x$

$\Leftrightarrow \cos^2 2x=\sin 2x\cos 2x \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos 2x=0\\ \tan 2x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}$ hoặc $x=\frac{\pi}{8}+\frac{k\pi}{2}$

6. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{1}{\cos x}+\frac{1}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2\sin x\cos x\cos 2x}$

$\Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x+\cos 2x-1=0 \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x=1-\cos 2x \Leftrightarrow 2\sin x\cos 2x=2\sin^2 x$

$\cos 2x=\sin x=\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+\frac{2k\pi}{3}$ hoặc $x=-\frac{\pi}{2}+2k\pi$

7. Đặt $t=\tan x \Rightarrow \sin 2x=\frac{2t}{1+t^2}$. Phương trình cho trở thành: $1+3t=\frac{4t}{1+t^2}$

$\Leftrightarrow (t+1)\left(3t^2-2t+1\right)=0 \Leftrightarrow t=-1 \Leftrightarrow \tan x=-1 \Leftrightarrow x=-\frac{\pi}{4}+k\pi$

Bài tập 4: Giải các phương trình:

1. $4\cos^2 x-\cos 3x=6\cos x-2(1+\cos 2x)$
2. $4\cos^3 x+3\sqrt{2}\sin 2x=8\cos x$
3. $\tan^2 x+\cot^2 x+5(\tan x+\cot x)+6=0$
4. $\sin 3x-3\sin 2x-\cos 2x+3\sin x+3\cos x-2=0$
5. $\sin x+\sin^2 x+\sin^3 x+\sin^4 x=\cos x+\cos^2 x+\cos^3 x+\cos^4 x$

Hướng dẫn giải

1. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 4\cos^2 x-\left(4\cos^3 x-3\cos x\right)=6\cos x-4\cos^2 x$

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x+3\cos x=0 \Leftrightarrow \cos x\left(4\cos^2 x+3\right)=0 \Leftrightarrow \cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$

2. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow 4\cos^3 x+6\sqrt{2}\sin x\cos x=8\cos x \Leftrightarrow 2\cos x\left(2\cos^2 x+3\sqrt{2}\sin x-4\right)=0$

$\Leftrightarrow 2\cos x\left(2\sin^2 x-3\sqrt{2}\sin x+2\right)=0 \Leftrightarrow \cos x=0$ hoặc $\sin x=\sqrt{2}$ hoặc $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi$ hoặc $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi$ hoặc $x=\frac{3\pi}{4}+2k\pi$.

3. Phương trình đã cho

$\Leftrightarrow (\tan x+\cot x)^2+5(\tan x+\cot x)+4=0 \Leftrightarrow \tan x+\cot x=-1$ hoặc $\tan x+\cot x=-4$

Với $\tan x+\cot x=-4 \Leftrightarrow \sin 2x=-\frac{1}{2} \Rightarrow x=-\frac{\pi}{12}+k\pi$ hoặc $x=\frac{7\pi}{12}+k\pi$

4. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sin 3x-3\sin 2x-\cos 2x+3\sin x+3\cos x-2=0$

$\Leftrightarrow (\sin 3x+\sin x)+2\sin x-3\sin 2x-(\cos 2x+2-3\cos x)=0$

$\Leftrightarrow 2\sin 2x.\cos x+2\sin x-6.\sin.\cos x-\left(2\cos^2 x-3\cos x+1\right)=0$

$\Leftrightarrow (2\sin x-1)\left(2\cos^2 x-3\cos x+1\right)=0$

5. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (\sin x-\cos x).\left[2+2(\sin x+\cos x)+\sin x.\cos x\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sin x-\cos x=0\\ 2+2(\sin x+\cos x)+\sin x.\cos x=0\end{array}\right.$

* Với $\sin x-\cos x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k\pi$

* Với $2+2(\sin x+\cos x)+\sin x.\cos x=0$, đặt $t=\sin x+\cos x$, $|t|\le\sqrt{2}$, ta được $t^2+4t+3=0 \Leftrightarrow t=-1$ hoặc $t=-3$ (không thỏa $|t|\le\sqrt{2}$).

* Với $t=-1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=\pi+m2\pi\\ x=-\frac{\pi}{2}+m2\pi\end{array}\right.$

Vậy, phương trình có nghiệm: $x=\frac{\pi}{4}+k\pi, x=\pi+m2\pi, x=-\frac{\pi}{2}+m2\pi$.

Bài tập 5: Giải các phương trình

1. $4\cos x-2\cos 2x-\cos 4x=1$
2. $\sqrt{2}(\sin x+\cos x)\tan x+\cot x$

3. $1+\sin\frac{x}{2}\sin x-\cos\frac{x}{2}\sin^2 x=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)$

4. $\sin\left(2x+\frac{17\pi}{2}\right)+16=2\sqrt{3}.\sin x\cos x+20\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{12}\right)$

5. $2\sin^2\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=1+4\cos^2\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{6}\right)$

6. $3\tan^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x=\left(2+3\sqrt{2}\right)\sin x$

Hướng dẫn giải

1. Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 4\cos x=2\cos 2x+1+\cos 4x\Leftrightarrow 4\cos x=2\cos 2x+2\cos^2 2x$$

$$\Leftrightarrow 4\cos x=2\cos 2x(1+\cos 2x)\Leftrightarrow 4\cos x=4\cos 2x\cos^2 x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos x=0\\ \cos 2x\cos x=1\end{array}\right.$$

2. Điều kiện: $\sin x.\cos x\neq 0\Rightarrow\sin 2x\neq 0\Leftrightarrow x\neq k\frac{\pi}{2}$.

$$\tan x+\cot x=\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\sin x}=2.\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{2.\sin x.\cos x}=\frac{2}{\sin 2x}.$$

Đặt $t=\sin x+\cos x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Rightarrow\sin 2x=t^2-1$ và $|t|\leq\sqrt{2}$.

Phương trình cho trở thành: $\sqrt{2}t=\frac{2}{t^2-1}, t\neq\pm 1$

$$\left(t-\sqrt{2}\right)\left(t^2+\sqrt{2}t+1\right)=0, t\neq\pm 1\Rightarrow t=\sqrt{2}$$

Với $t=\sqrt{2}\Rightarrow\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=1\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+m2\pi.$

3. Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 1+\sin\frac{x}{2}\sin x-\cos\frac{x}{2}\sin^2 x=1+\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=1+\sin x$

$$\Leftrightarrow\sin x\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}\sin x-1\right)=0\Leftrightarrow\sin x\left(\sin\frac{x}{2}-\cos\frac{x}{2}.2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-1\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\sin x\left(\sin\frac{x}{2}-1\right)\left(2\sin^2\frac{x}{2}+2\sin\frac{x}{2}+1\right)=0\Leftrightarrow\ldots\Leftrightarrow x=k\pi, k\in\mathbb{Z}$$

4. $\cos 2x-\sqrt{3}\sin 2x+10\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+6=0$

$$\Leftrightarrow\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)+5\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+3=0\Leftrightarrow 2\cos^2\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+5\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+2=0$$

$$\Rightarrow\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=-\frac{1}{2}\Rightarrow x=-\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ \text{hoặc}\ x=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

5. Đặt $t=x+\frac{\pi}{2}$ khi đó phương trình đã cho trở thành: $2\sin^2\frac{t}{2}=1+4\cos^2\frac{t}{3}$

$$\Leftrightarrow\cos t=-4\cos^2\frac{t}{3}\Leftrightarrow\cos 3.\frac{t}{3}+4\cos^2\frac{t}{3}=0\Leftrightarrow 4\cos^3\frac{t}{3}+4\cos^2\frac{t}{3}-3\cos\frac{t}{3}=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{t}{3}=0\\ \cos\frac{t}{3}=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3\pi}{2}+k3\pi\\ t=\pm\pi+k6\pi\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pi+k3\pi\\ x=\frac{\pi}{2}+k6\pi\end{array}\right.\quad(k\in\mathbb{Z})$$

6. $3\tan^2 x+2\sqrt{2}\cos^2 x=\left(2+3\sqrt{2}\right)\sin x$

Với $\cos x\neq 0$ thì $\sin x\neq\pm 1$, vì thế chia cả 2 vế phương trình cho $\sin x\neq 0$, ta được phương trình: $3\left(\frac{\sin x}{\cos^2 x}\right)+2\sqrt{2}\left(\frac{\cos^2 x}{\sin x}\right)=2+3\sqrt{2}$ (*)

Đặt $t=\frac{\sin x}{\cos^2 x}$, thì phương trình (*) trở thành: $3t+2\sqrt{2}\frac{1}{t}=2+3\sqrt{2}$

$$\Leftrightarrow 3t^2-\left(2+3\sqrt{2}\right)t+2\sqrt{2}=0\Leftrightarrow t=\sqrt{2}\ \text{hoặc}\ t=\frac{2}{3}$$

Với $t=\frac{2}{3}$ tức $\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\frac{2}{3}\Leftrightarrow 2\left(1-\sin^2 x\right)=3\sin x\Leftrightarrow 2\sin^2 x+3\sin x-2=0$ (1)

Đặt $u=\sin x$, $-1\leq u\leq 1$. Khi đó phương trình trở thành: $2u^2+3u-2=0$, phương trình này có nghiệm $u=-2$ (không thỏa), $u=\frac{1}{2}$ (thỏa).

Với $u=\frac{1}{2}$ tức $\sin x=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

Với $t=\sqrt{2}$ tức $\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\sqrt{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\left(1-\sin^2 x\right)=\sin x\Leftrightarrow\sqrt{2}\sin^2 x+\sin x-\sqrt{2}=0$

(2). Đặt $v=\sin x$, $-1\leq v\leq 1$. Khi đó phương trình trở thành: $\sqrt{2}v^2+v-2=0$, phương trình này có nghiệm $v=-\sqrt{2}$ (không thỏa), $v=\frac{1}{\sqrt{2}}$ (thỏa).

Với $v=\frac{1}{\sqrt{2}}$ tức $\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi$

Đối chiếu điều kiện, phương trình có các nghiệm :

$$x=\frac{\pi}{4}+k2\pi,\ x=\frac{3\pi}{4}+k2\pi,\ x=\frac{\pi}{6}+k2\pi,\ x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\ \text{với}\ k\in\mathbb{Z}$$

Chuyên đề III

PHƯƠNG TRÌNH, HỆ PHƯƠNG TRÌNH, BẤT PHƯƠNG TRÌNH ĐẠI SỐ.

Dạng 1. Phương trình bậc hai

Cho phương trình $ax^2+bx+c=0, a\neq 0$ có $\Delta=b^2-4ac$ (hoặc $\Delta'=b'^2-ac$)

- Nếu $\Delta>0$ thì phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a};\ x_2=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

- Nếu $\Delta=0$ thì phương trình có nghiệm kép $x_1=x_2=-\frac{b}{2a}$.
- Nếu $\Delta<0$ thì phương trình vô nghiệm.
- Nếu $b=2b'$ thì ta dùng công thức thu gọn: $\Delta'=b'^2-ac\Rightarrow\Delta=4\Delta'$.

$$x_{1,2}=\frac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}.$$

Định lí Viét:

Nếu phương trình bậc hai $ax^2+bx+c=0$ $(a\neq 0)$ có hai nghiệm x_1,x_2 thì ta có:

$$\begin{cases}S=x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}\\ P=x_1x_2=\dfrac{c}{a}\end{cases}$$

Chú ý

- *Định lí Viet chỉ là điều kiện cần chứ không phải là điều kiện đủ, do đó trước khi sử dụng định lí Viet ta phải tìm điều kiện cho phương trình bậc hai có nghiệm.*
- *Đảo lại ta có: " Nếu hai số có tổng là S và tích là P thì hai số đó (nếu có) là nghiệm của phương trình :* $X^2-SX+P=0$.

Ví dụ 1. Tìm m để đường thẳng $d: y=x+2m$ cắt đồ thị $(C): y=\dfrac{x^2-x+1}{x-1}$ tại hai điểm phân biệt có hoành độ lớn hơn 2.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C) và d:

$$\frac{x^2-x+1}{x-1}=-x+2m\Leftrightarrow 2x^2-2(m+1)x+2m+1=0\quad(*)$$

(C) và d cắt nhau tại hai điểm phân biệt $\Leftrightarrow(*)$ có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq 1$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(m+1)^2-2(m+1)>0\\ 2-2m-2+2m+1\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow m^2-2m-1>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m>1+\sqrt{2}\\ m<1-\sqrt{2}\end{array}\right..$$

Khi đó $x_1,x_2>2\Leftrightarrow\begin{cases}x_1-2+x_2-2>0\\ (x_1-2)(x_2-2)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2-4>0\\ x_1x_2-2(x_1+x_2)+4>0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+1-4>0\\ \dfrac{2m+1}{2}-2(m+1)+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>3\\ m<\dfrac{5}{2}\end{cases}\text{ hệ này vô nghiệm.}$$

Vậy không tồn tại m thỏa yêu cầu bài toán.

Nhận xét 11.1.1. *Cho phương trình bậc hai* $ax^2+bx+c=0$ *có hai nghiệm* x_1,x_2 *và số thực* α. *Khi đó:*

- *Hai nghiệm* x_1,x_2 *cùng lớn hơn* α *khi và chỉ khi* $\Leftrightarrow f(x)>0,\ \forall x\in\mathbb{R}$
- *Hai nghiệm* x_1,x_2 *cùng nhỏ hơn* α *khi và chỉ khi* $f(x)<0, f(x)>0,$
- *Hai nghiệm* x_1,x_2 *nằm về hai phía so với* α *khi và chỉ khi* $(x_1-\alpha)(x_2-\alpha)<0.$

Ví dụ 2. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của các biểu thức sau

1. $A=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$ với $x\in\mathbb{R}$
2. $B=\dfrac{2x^2+xy+y^2}{x^2-xy+2}$ với $x,y\in\mathbb{R}$ và $x^2+y^2=1$.

Lời giải

1. Ta có: $A=\dfrac{x^2-x+1}{x^2+x+1}\Leftrightarrow(A-1)x^2+(A+1)x+A-1=0\ \ (1)$

- Nếu $A=1$ thì (1) có nghiệm $x=0$
- $A\neq 1$, khi đó (1) có nghiệm x khi và chỉ khi

$$\Delta=(A+1)^2-4(A-1)^2\geq 0\Leftrightarrow 3A^2-10A+3\leq 0\Leftrightarrow\frac{1}{3}\leq A\leq 3.$$

Từ đó ta có được: $\max A=3$ đạt được khi $x=-1$

$\min A=\dfrac{1}{3}$ đạt được khi $x=1$.

2. Ta có: $B=\dfrac{2x^2+xy+y^2}{3x^2-xy+2y^2}$

- Nếu $y=0\Rightarrow B=\dfrac{2}{3}$
- Nếu $y\neq 0$ ta đặt $x=ty, t\in\mathbb{R}$. Ta có được:

$$B=\frac{2t^2+t+1}{3t^2-t+2}\Leftrightarrow(3B-2)t^2-(B+1)t+2B-1=0\quad(*)$$

∗ Với $B=\frac{2}{3}$ ta có: $t=\frac{1}{5}$

∗ Với $B\neq\frac{2}{3}$ thì $(*)$ có nghiệm $\Leftrightarrow\Delta=(B+1)^2-4(3B-2)(2B-1)\geq 0$

$$\Leftrightarrow B^2+2B+1-4\left(6B^2-7B+2\right)\geq 0\Leftrightarrow -23B^2+30B-7\leq 0\Leftrightarrow\frac{7}{23}\leq B\leq 1$$

Từ đó ta có được: $\max B=1$ đạt được khi $t=1\Leftrightarrow x=y=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\min B=\frac{7}{23}\text{ đạt được khi } t=-\frac{3}{5}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\frac{3}{5}y\\ y=\pm\frac{5}{\sqrt{34}}\end{cases}.$$

Nhận xét

Phương pháp tìm cực trị ở trên gọi là phương pháp sử dụng miền giá trị. Nội dung của phương pháp đó như sau:

Xét hàm số $y=f(x)$ *xác định trên* D, *khi đó tập* $T=\{f(x)\,|\,x\in D\}$ *gọi là tập giá trị của hàm số* $y=f(x)$. *Nếu* $T=[a;b]$ *thì* $\max_D f(x)=b,\ \min_D f(x)=a$

Để tìm miền giá trị của hàm số ta đi tìm y *để phương trình* $f(x)=y$ *có nghiệm trên D.*

Dạng 2. Phương trình đa thức bậc cao

Phương pháp chung để giải phương trình đa thức bậc cao ta thường sử dụng các cách sau:

Cách 1: Đưa về phương trình tích: Để đưa về phương trình tích ta thường sử dụng các kỹ thuật sau:

a. Nhẩm một nghiệm rồi thực hiện chia đa thức chuyển về phương trình có bậc nhỏ hơn. Khi nhẩm nghiệm chúng ta cần lưu ý:

- Nếu tổng các hệ số của phương trình bằng 0 thì phương trình có nghiệm $x=1$
- Nếu tổng đan dấu các hệ số của phương trình bằng 0 thì phương trình có nghiệm $x=-1$.
- Nếu $x=m\in\mathbb{Z}$ là một nghiệm của phương trình: $a_nx^n+...+a_1x+a_0=0$ thì m là ước của hệ số tự do a_0.

b. Sử dụng các hằng đẳng thức để biến đổi.

c. Sử dụng phương pháp hệ số bất định.

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Một số dạng phương trình bậc 4 chúng ta thường đặt ẩn phụ

- **Dạng 1:** Phương trình trùng phương: $ax^4+bx^2+c=0\ (a\neq 0)\ (1)$.

Với dạng này ta đặt $t=x^2$, $t\geq 0$ ta chuyển về phương trình: $at^2+bt+c=0\ \ (2)$

Chú ý : Số nghiệm phương trình (1) phụ thuộc vào số nghiệm không âm của (2).

- **Dạng 2:** Phương trình đối xứng (hay phương trình hồi quy):

$$ax^4\pm bx^3+cx^2\pm kbx+k^2a=0\quad(k>0).$$

Với dạng này ta chia hai vế phương trình cho $x^2\ \ (x\neq 0)$ ta có phương trình :

$$a\left(x^2+\frac{k^2}{x^2}\right)\pm b\left(x+\frac{k}{x}\right)+c=0.$$

Đặt $t=x+\frac{k}{x}$ với $|t|\geq 2\sqrt{k}$ ta có : $x^2+\frac{k^2}{x^2}=\left(x+\frac{k}{x}\right)^2-2k=t^2-2k$

thay vào ta được phương trình: $a\left(t^2-2k\right)\pm bt+c=0$.

- **Dạng 3:** Phương trình : $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=e$, trong đó $a+b=c+d$

Phương trình $\Leftrightarrow\left[x^2+(a+b)x+ab\right].\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=e$.

Đặt $t=x^2+(a+b)x$ ta có: $(t+ab)(t+cd)=e$.

- **Dạng 4:** Phương trình $(x+a)(x+b)(x+c)(x+d)=ex^2$, trong đó $ab=cd$.

Với dạng này ta chia hai vế phương trình cho $x^2\ (x\neq 0)$.

Phương trình $\Leftrightarrow\left[x^2+(a+b)x+ab\right].\left[x^2+(c+d)x+cd\right]=ex^2$

$\Leftrightarrow\left(x+\frac{ab}{x}+a+b\right).\left(x+\frac{cd}{x}+c+d\right)=e$. Đặt $t=x+\frac{ab}{x}=x+\frac{cd}{x}$.

Ta có phương trình : $(t+a+b)(t+c+d)=e$.

- **Dạng 5:** Phương trình $(x+a)^4+(x+b)^4=c$.

Đặt $x=t-\frac{a+b}{2}$ ta đưa về phương trình trùng phương.

Ví dụ 1. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^3-2x^2-mx+m+1\ \ (C_m)$ cắt trục Ox tại ba điểm phân biệt có hoành độ x_1,x_2,x_3 thỏa: $x_1^2+x_2^2+x_3^2>4$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của đồ thị (C_m) với Ox:

$$x^3-2x^2-mx+m+1=0\Leftrightarrow(x-1)\left(x^2-x-m-1\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\x^2-x-m-1=0\ (*)\end{array}\right.$$

Yêu cầu bài toán ⇔ (*) có hai nghiệm phân biệt $x_1,x_2\neq1$ thỏa: $x_1^2+x_2^2>3$

Tức là: $\begin{cases}\Delta=5+4m>0\\-m-1\neq0\\(x_1+x_2)^2-2x_1x_2>3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m>-\dfrac{5}{4}\\m\neq-1\\3+2m>3\end{cases}\Leftrightarrow m>0.$

Ví dụ 2. Tìm m để đồ thị hàm số $y=x^4-2(m+1)x^2+m+5$ (C_m) cắt Ox tại 4 điểm A,B,C,D thỏa $AB=BC=CD$.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm của (C_m) và Ox

$$x^4-2(m+1)x^2+m+5=0$$

Đặt $t=x^2,t\geq0$, ta có: $t^2-2(m+1)t+m+5=0$ (1).

(C_m) cắt Ox tại 4 điểm phân biệt ⇔ (1) có hai nghiệm dương phân biệt t_1,t_2 $(t_1<t_2)$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'=(m+1)^2-m-5=m^2+m-4>0\\S=m+1>0\\P=m+5>0\end{cases}\Leftrightarrow m>\frac{-1+\sqrt{17}}{2}\ (*)$$

Khi đó: $A\left(-\sqrt{t_2};0\right),B\left(-\sqrt{t_1};0\right),C\left(\sqrt{t_1};0\right),D\left(\sqrt{t_2};0\right)$

Suy ra $AB=BC=CD\Leftrightarrow\begin{cases}-\sqrt{t_1}+\sqrt{t_2}=2\sqrt{t_1}\\2\sqrt{t_1}=\sqrt{t_2}-\sqrt{t_1}\end{cases}\Leftrightarrow\sqrt{t_2}=3\sqrt{t_1}\Leftrightarrow t_2=9t_1$

Mà theo định lí Viét: $\begin{cases}t_1+t_2=2m+2\\t_1.t_2=m+5\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t_1=\dfrac{m+1}{5}\\t_1^2=\dfrac{m+5}{9}\end{cases}$

Do đó: $\left(\dfrac{m+1}{5}\right)^2=\dfrac{m+5}{9}\Leftrightarrow9m^2-7m-116=0\Leftrightarrow m=4,m=-\dfrac{29}{9}$

Kết hợp với (*) ta có: $m=4$ là giá trị cần tìm.

Dạng 3. Phương trình chứa giá trị tuyệt đối

Để giải phương trình chứa trị tuyệt đối, ta thường sử dụng hai cách sau

Cách 1: Sử dụng định nghĩa và các tính chất của trị tuyệt đối để biến đổi phương trình đã cho thành phương trình không chứa dấu trị tuyệt đối.

Các dạng thường gặp:

- $|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\geq0\\f(x)=\pm g(x)\end{cases}$
- $|f(x)|=|g(x)|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\f(x)=-g(x)\end{array}\right.$.

Cách 2: Đặt ẩn phụ

Ví dụ 1. Tìm m để phương trình sau có nghiệm: $x^2-2x-2m|x-1|+m+3=0$

Lời giải

Phương trình $\Leftrightarrow(x-1)^2-2m|x-1|+m+2=0$

Đặt $t=|x-1|,t\geq0$ ta có phương trình : $t^2-2mt+m+2=0$ (*)

Phương trình đã cho có nghiệm ⇔ phương trình (*) có nghiệm $t\geq0$

Ta phương trình (*) không có nghiệm $t\geq0$ nếu xảy ra một trong các trường hợp sau:

TH 1: Phương trình (*) vô nghiệm $\Leftrightarrow\Delta'=m^2-m-2<0\Leftrightarrow-1<m<2$

TH 2: Phương trình (*) có hai nghiệm $t_1,t_2<0$.

Điều này xảy ra khi $\begin{cases}\Delta'=m^2-m-2\geq0\\S=2m<0\\P=m+2>0\end{cases}\Leftrightarrow-2<m\leq-1.$

Suy ra (*) không có nghiệm $t\geq0$ khi $-2<m<2$

Vậy $|m|\geq2$ là những giá trị thỏa yêu cầu bài toán.

Ví dụ 2. Tìm m để giá trị lớn nhất của hàm số $y=\left|x^2-2mx+m+1\right|$ trên đoạn $[-1;1]$ đạt giá trị nhỏ nhất

Lời giải

Hàm số $y=f(x)=x^2-2mx+m+1$ có tọa độ đỉnh $I\left(m;-m^2+m+1\right)$

- $|m|>1$ suy ra $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\max\{|m-2|,|3m+2|\}\geq\dfrac{|m-2|+|3m+2|}{2}\geq2|m|>2$ (1)
- $|m|\leq1$, suy ra: $\max\limits_{[-1;1]}f(x)=\max\left\{|m-2|,|3m+2|,\left|m^2-m-1\right|\right\}$

Mà $|m-2| \ge |m^2-m-1| \ \forall m \in [-1;1]$ vì điều này tương đương với

$(2-m)^2-(m^2-m-1) \ge 0 \Leftrightarrow (m^2-2m+1)(3-m^2) \ge 0$ luôn đúng với $\forall m \in [-1;1]$.

Do đó: $\max\limits_{[-1;1]} f(x) = \max\{|m-2|,|3m+2|\} = \begin{cases} 2-m & \text{khi } -1 \le m < 0 \\ 3m+2 & \text{khi } 0 \le m \le 1 \end{cases}$

Từ đó suy ra $\max\limits_{[-1;1]} f(x) \ge 2$ (2)

Kết hợp (1) và (2) ta có được: $\max\limits_{[-1;1]} f(x) \ge 2$, đẳng thức xảy ra khi $m=0$.

Vậy $m=0$ là giá trị cần tìm.

Dạng 4. Bất phương trình chứa giá trị tuyệt đối

Cũng như phương trình chứa trị tuyệt đối, để giải bất phương trình chứa trị tuyệt đối ta thường sử dụng hai cách là biến đổi và đặt ẩn phụ.

Khi sử dụng biến đổi cần chú ý:

- $|f(x)| \le |g(x)| \Leftrightarrow (f(x)-g(x))(f(x)+g(x)) \le 0$
- $|f(x)| \le g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ -g(x) \le f(x) \le g(x) \end{cases}$
- $|f(x)| \ge g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} g(x) < 0 \\ \begin{cases} g(x) \ge 0 \\ \left[\begin{array}{l} f(x) \ge g(x) \\ f(x) \le -g(x) \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right.$.

Ví dụ 1. Giải bất phương trình: $||2x-3|-4| \le |4x-1|$

Lời giải

Bất phương trình $\Leftrightarrow (|2x-3|-4)^2 \le (x+1)^2$

$$S = \left(-1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cup \left(\frac{2}{\sqrt{5}};1\right) \ (*)$$

Ta xét hai trường hợp sau :

- $x \ge \frac{3}{2}$, khi đó $\frac{2}{\sqrt{5}} < x < 1$ nên (1) trở thành:

$3x^2-14x+24 \le 16x-24 \Leftrightarrow x^2-10x+16 \le 0 \Leftrightarrow 2 \le x \le 8$

- $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} > 2 \Leftrightarrow x > 2\sqrt{1-x^2} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x < 1 \\ x^2 > 4(1-x^2) \end{cases}$, khi đó $|2x-3| = 3-2x$ nên (*)

trở thành: $3x^2-14x+24 \le -16x+24 \Leftrightarrow x^2+6x \le 0 \Leftrightarrow -6 \le x \le 0$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $t > 2$.

Ví dụ 2. Tìm m để bất phương trình sau có nghiệm: $|x^2-3x+2| \le 2m+3x^2+5x$

Lời giải

Bất phương trình $t = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

Xét hàm số $f(x) = |x^2-3x+2| - 3x^2 - 5x = \begin{cases} -2x^2-8x+2 & \text{khi } x \in (-\infty;1) \cup (2;+\infty) \\ -4x^2-2x-2 & \text{khi } x \in [1;2] \end{cases}$

Từ đó ta có: $\max f(x) = f(-2) = 10$

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm $\frac{x^2}{1-x^2} - 3\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + 2 > 0$ (*).

Nhận xét *Cho hàm số* $y = f(x)$ *xác định trên D*

- *Bất phương trình* $\frac{1}{1-x^2} - 1 + 2 > \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ *(* $f(x) \le k$ *) có nghiệm trên* D

$\Leftrightarrow \max\limits_{D} f(x) \ge k$ *(* $|x| < 1$ *) với điều kiện tồn tại* $\max\limits_{D} f(x)$ *(* $\min\limits_{D} f(x)$ *).*

$\frac{1}{1-x^2} + 1 > \frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ *Bất phương trình* $f(x) \ge k$ *(* $f(x) \le k$ *) nghiệm đúng với*

$\forall x \in D \Leftrightarrow \min\limits_{D} f(x) \ge k$

($\max\limits_{D} f(x) \le k$ *) với điều kiện tồn tại* $\max\limits_{D} f(x)$ *(* $\min\limits_{D} f(x)$ *).*

Dạng 5. Hệ phương trình – hệ bất phương trình chứa giá trị tuyệt đối

Ví dụ 1. Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2+y^2=2 \\ |x+y+2|+|3x-y+4| = 4x+6 \end{cases}$

Lời giải

Ta có: $|x|,|y| \le \sqrt{2}$

$|x+y+2|+|3x-y+4| = 4x+6 = (x+y+2)+(3x-y+4)$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y+2 \ge 0 \\ 3x-y+4 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \ge -x-2 \\ y \le 3x+4 \end{cases}$.

Mặt khác: $x^2+y^2=2 \Leftrightarrow y = \pm\sqrt{2-x^2}$

- $y = \sqrt{2-x^2}$, , ta có: $\begin{cases} \sqrt{2-x^2} \ge -x-2 \\ \sqrt{2-x^2} \le 3x+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{4}{3} \le x \le \sqrt{2} \\ 5x^2+12x+7 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1 \le x \le \sqrt{2}$

- $y=-\sqrt{2-x^2}$, ta có: $\begin{cases}-\sqrt{2-x^2}\ge -x-2\\ -\sqrt{2-x^2}\le 3x+4\end{cases}\Leftrightarrow -\frac{7}{5}\le x\le -\frac{4}{3}$

Vậy nghiệm của hệ: $\left(t;\sqrt{2-t^2}\right)$ với 3

$\left(t;-\sqrt{2-t^2}\right)$ với $-\frac{7}{5}\le t\le -\frac{4}{3}$.

Ví dụ 2. Tìm m để hệ: $\begin{cases}x^2+y^2+2x\le 1\\ |x-y|+m=0\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Lời giải

Từ phương trình thứ hai ta có 2 trường hợp

- $x\ge y$ ta có: $\begin{cases}x^2+y^2+2x-1\le 0\\ x-y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x+m\\ 2x^2+2(m+1)x+m^2-1\le 0\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta_1'=0\Leftrightarrow -m^2+2m+3=0\Leftrightarrow m=-1$

- $m=-\frac{3}{4}$ ta có: $\begin{cases}x^2+y^2+2x-1\le 0\\ -x+y+m=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-m\\ 2x^2-2(m-1)x+m^2-1\le 0\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow \Delta_2'=0\Leftrightarrow -m^2-2m+3=0\Leftrightarrow m=-3$.

Vậy $\{1;-3\}$ là những giá trị cần tìm.

Dạng 6. Phương trình – bất phương trình chứa căn thức

1. Phương trình chứa căn thức:

1.1 $\sqrt{f(x)}=\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow f(x)=g(x)\ge 0$

1.2 $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)=g^2(x)\end{cases}$

1.3 $\sqrt[3]{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow f(x)=[g(x)]^3$

2. Bất phương trình chứa căn thức:

2.1 $\sqrt{f(x)}\ge\sqrt{g(x)}\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)\ge g(x)\end{cases}$

2.2 $\sqrt{f(x)}<g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\ g(x)\ge 0\\ f(x)<[g(x)]^2\end{cases}$

2.3 $\sqrt{f(x)}>g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)\ge 0\\ g(x)<0\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}g(x)\ge 0\\ f(x)>[g(x)]^2\end{cases}$

Ví dụ 1. Giải các phương trình:

1. $\sqrt{x^2-3x+3}+\sqrt{x^2-3x+6}=3$

2. $(4x-1)\sqrt{x^2+1}=2x^2+2x+1$

3. $\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2}+\frac{1}{2}=\frac{x^2}{2}+3x$

4. $x+\frac{x}{\sqrt{x^2-1}}=\frac{35}{12}$

Lời giải

1. Đặt: $t=x^2-3x+3>0$

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{t}+\sqrt{t+3}=3$

Bình phương 2 vế ta được $2t+3+2\sqrt{t^2+3t}=9$ tức $\sqrt{t^2+3t}=3-t$, phương trình này tương đương với:

$$\begin{cases}3-t\ge 0(t>0)\\ t^2+3t=(3-t)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<t\le 3\\ 9t-9=0\end{cases}\Rightarrow t=1$$

Với $t=1$ tức $x^2-3x+3=1\Leftrightarrow x^2-3x+2=0\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$

Vậy $x=1$ hoặc $x=2$ là nghiệm phương trình đã cho.

2. Đặt $u=\sqrt{x^2+1}\ge 1\Rightarrow u^2=x^2+1$

Khi đó phương trình đã cho được viết lại: $(4x-1)u=2u^2+2x-1$

$\Leftrightarrow u^2-(4x-1)u+2x-1=0$, giải phương trình ta được $u=2x-1$

hoặc $u=\frac{1}{2}$ không thỏa $u\ge 1$.

Với $u=2x-1$ tức $\sqrt{x^2+1}=2x-1$ phương trình này tương đương với

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2x-1\ge 0\\ x^2+1=(2x-1)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge\frac{1}{2}\\ 3x^2-4x=0\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{4}{3}.$$

Vậy $x=\frac{4}{3}$ là nghiệm phương trình đã cho.

3. Phương trình đã cho được viết lại $2.\sqrt{5x^3+3x^2+3x-2}=x^2+6x-1$, đặt điều kiện vế phải rồi bình phương 2 vế, rút gọn ta được phương trình:

$$x^4-8x^3+22x^2-24x+9=0\ (*).$$

* $x=0$ không là nghiệm của phương trình $(*)$.

* $x\ne 0$ chia cả hai vế của phương trình $(*)$ cho x^2, khi đó phương trình $(*)$ viết lại $x^2-8x+22-\frac{24}{x}+\frac{9}{x^2}=0\ (**)$.

Đặt $y=x+\frac{3}{x}$ phương trình $(**)$ trở thành $y^2-8y+16=0\Rightarrow y=4$ Với $y=4$ tức $x+\frac{3}{x}=4\Leftrightarrow x^2-4x+3=0$, phương trình có 2 nghiệm $x=1$ hoặc $x=3$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=1$ hoặc $x=3$.

4. Điều kiện: $x>1$ hoặc $x<-1$.

Dễ thấy $x=0$ không là nghiệm phương trình.

Đặt: $u=\frac{1}{x}$ và $v=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases}u^2+v^2=1\\ \frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{35}{12}\end{cases}$ $(*)$

Đặt $S=u+v,\ P=uv$. Với điều kiện $S^2-4P\ge 0$, thì hệ $(*)$ trở thành

$\begin{cases}S^2-2P=1\\ \frac{S}{P}=\frac{35}{12}\end{cases}$, giải hệ này ta được $\begin{cases}S=\frac{7}{5}\\ P=\frac{12}{25}\end{cases}$

u,v là nghiệm phương trình $X^2-\frac{7}{5}X+\frac{12}{25}=0$, giải phương trình này ta được $X=\frac{4}{5}$ hoặc $X=\frac{3}{5}$. Hay hệ $(*)$ có nghiệm $u_1=\frac{4}{5}$ hoặc $u_2=\frac{3}{5}$.

$*$ Với $u_1=\frac{4}{5}\Rightarrow x=\frac{5}{4}$ $\qquad$ $*$ Với $u_2=\frac{3}{5}\Rightarrow x=\frac{5}{3}$

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm $x=\frac{5}{3}$ hoặc $x=\frac{5}{4}$.

Để ý: $|x|>1$ gợi ý ta đặt $x=\frac{1}{\cos\alpha},\ \alpha\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Phương trình cho trở thành:

$$\frac{1}{\cos\alpha}+\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{35}{12}\Leftrightarrow \sin\alpha+\cos\alpha=\frac{35}{12}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Ví dụ 2. Giải các phương trình:

1. $\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}+\sqrt{(1+x)(8-x)}=3$ $\qquad$ **2.** $\sin x=\frac{16\cos^6x+2\cos^4x}{54-51\cos^2x}$

3. $\frac{2x-\pi+\sqrt{(2x-\pi)^2+4}}{-x+\sqrt{x^2+1}}=2\tan^2x$ với $x\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$

Lời giải

1. Điều kiện: $-1\le x\le 8$.

Đặt: $t=\sqrt{1+x}+\sqrt{8-x}$ và $t\ge 0$

Suy ra $t^2=9+2\sqrt{(1+x)(8-x)}$, hay $\sqrt{(1+x)(8-x)}=\frac{t^2-9}{2}$

Phương trình đã cho trở thành: $t+\frac{t^2-9}{2}=3\Leftrightarrow t^2+2t-15=0$, phương trình này có nghiệm $t=3$ thỏa mãn điều kiện.

Với $t=3$ tức $\sqrt{(1+x)(8-x)}=0\Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=8$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-1, x=8$.

Để ý: Với $m\in\mathbb{R}$, đặt $\begin{cases}(m-2)\sqrt{x}+(m-4)y=2\\ (m+1)\sqrt{x}+(3m+2)y=-1\end{cases}$ với $t=\sqrt{x}$.

Đặt tiếp: $t\ge 0$ với $m\in\mathbb{R}$.

Phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases}(m-2)t+(m-4)y=2\\ (m+1)t+(3m+2)y=-1\end{cases}$ suy ra $t\ge 0$

(không thỏa) hoặc $u=1$ tức $x=-1$ hoặc $x=8$.

2. Ta thấy, $\frac{16\cos^6x+2\cos^4x}{54-51\cos^2x}>0\Rightarrow \sin x>0$ hay $\sin x=\sqrt{1-\cos^2x}$

Đặt $t=\cos^2x,\ 0<t<1$

Phương trình cho trở thành: $\frac{16t^3+2t^2}{54-51t}-\sqrt{1-t}=0,\ 0<t<1$ $(*)$

Xét hàm số: $f(t)=\frac{16t^3+2t^2}{54-51t}-\sqrt{1-t}=0$ với $0<t<1$

Ta thấy: $f'(t)>0$ với $0<t<1$, suy ra $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;1)$ và $f\left(\frac{3}{4}\right)=0\Rightarrow t=\frac{3}{4}$ là nghiệm duy nhất của phương trình $(*)$ tức $\cos^2x=\frac{3}{4}$ hay

$\sin x=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{\pi}{6}+k2\pi$ hoặc $x=\frac{5\pi}{6}+k2\pi$

3. Phương trình cho $\Leftrightarrow\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\tan x=\frac{2x-\pi+\sqrt{(2x-\pi)^2+4}}{2\tan x}$

$$\Leftrightarrow\left(-x+\sqrt{x^2+1}\right)\tan x=\left[-\left(\frac{\pi}{2}-x\right)+\sqrt{\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^2+1}\right]\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\quad(*)$$

Xét $f(t)=\left(-t+\sqrt{t^2+1}\right)\tan t$ trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$. Dễ thấy $f(t)$ đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{\pi}{2}\right)$, nên $(*)\Leftrightarrow f(x)=f\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$ hay $x=\frac{\pi}{2}-x\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{4}$

Ví dụ 3. Giải các phương trình:

1. $x^3+2=3\sqrt[3]{3x-2}$ **2.** $\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}=2x-6$

Lời giải

1. Đặt $y=\sqrt[3]{3x-2}$ suy ra $y^3=3x-2$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\begin{cases}x^3=3y-2\\ y^3=3x-2\end{cases}$ suy ra $x^3-y^3=3y-3x$ hay

$$(x-y)\left(x^2+xy+y^2+3\right)=0 \quad (*)$$

Dễ thấy $x^2+xy+y^2+3=\left(x+\frac{y}{2}\right)^2+\frac{3y^2}{4}+3>0 \quad (\forall x,y\in\mathbb{R})$

Do vậy phương trình $(*)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào phương trình $y^3=3x-2$ ta được $x^3-3x+2=0$, phương trình tương đương với $(x-1)^2(x+2)=0\Leftrightarrow x=-2$ hoặc $x=1$

2. Điều kiện $x\ge\frac{3}{2}$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow\dfrac{\left(\sqrt{2x-3}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)}=2(x-6)$

$$\Leftrightarrow(x-3)\left(2-\frac{1}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)}\right)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}x-3=0\Rightarrow x=3 & (1)\\ 2-\dfrac{1}{\left(\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\right)}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Vì $x\ge\frac{3}{2}$ nên $\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}\ge\sqrt{\frac{3}{2}}>1$ tức $\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}<1$

$\Rightarrow 2-\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}>0\Rightarrow 2-\dfrac{1}{\sqrt{2x-3}+\sqrt{x}}=0$ vô nghiệm nên (2) vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=3$.

Ví dụ 4. Giải các phương trình:

1. $\sqrt{3x+3}-\sqrt{5-2x}-x^3+3x^2+10x-26=0$

2. $x^3-4x^2-5x+6=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$

Lời giải

1. Điều kiện: $-1\le x\le\frac{5}{2}$.

Dễ thấy, $x=-1$ hoặc $x=\frac{5}{2}$ không là nghiệm phương trình.

Phương trình cho viết lại:

$$\left(\sqrt{3x+3}-3\right)-\left(\sqrt{5-2x}-1\right)-(x-2)\left(x^2-x-12\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{3(x-2)}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2(x-2)}{\sqrt{5-2x}+1}-(x-2)\left(x^2-x-12\right)=0$$

$$\Leftrightarrow(x-2)\left[\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-x^2+x+12\right]=0$$

Xét hàm số $f(x)=-x^2+x+12$, với $x\in\left(-1;\frac{5}{2}\right)$.

Ta có: $f'(x)=-2x+1$ và $f'(x)=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Suy ra $\min\limits_{x\in\left(-1;\frac{5}{2}\right)}f=f\left(\frac{5}{2}\right)>0$, do đó

$$\frac{3}{\sqrt{3x+3}+3}+\frac{2}{\sqrt{5-2x}+1}-x^2+x+12>0,\ \text{mọi } x\in\left(-1;\frac{5}{2}\right)$$

Vậy, phương trình cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

2. Đặt $y=\sqrt[3]{7x^2+9x-4}$.

Khi đó phương trình cho $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\ 7x^2+9x-4=y^3\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\ y^3+y=x^3+3x^2+4x+2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\ y^3+y=(x+1)^3+x+1\,(*)\end{cases}\quad(\text{I})$$

$(*)$ có dạng $f(y)=f(x+1)$ (a)

Xét hàm $f(t)=t^3+t,\ t\in\mathbb{R}$

Vì $f'(t)=3t^2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$ nên hàm số đồng biến trên tập số thực $\mathbb{R}$.

Khi đó (a) $\Leftrightarrow y=x+1$

Hệ (I) $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-5x+6=y\\ y=x+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^3-4x^2-6x+5=0\ (**)\\ y=x+1\end{cases}$

Giải phương trình $(**)$ ta có tập nghiệm: $S=\left\{5,\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right\}$.

Ví dụ 5. Giải các bất phương trình:

1. $\dfrac{1}{1-x^2}+1>\dfrac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ **2.** $\dfrac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}}\ge1$

Lời giải

1. Điều kiện: $|x|<1$.

Bất phương trình đã cho viết lại: $\frac{1}{1-x^2}-1+2>\frac{3}{\sqrt{1-x^2}}$ tương đương với

$$\frac{x^2}{1-x^2}-3\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}+2>0\ (*).$$

Đặt $t=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ khi đó bất phương trình $(*)$ trở thành $t^2-3t+2>0$, giải bất phương trình này ta được $t<1$ hoặc $t>2$.

* Với $t<1$ tức $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}<1\Leftrightarrow\sqrt{1-x^2}>x$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ \begin{cases}0\le x<1\\ 1-x^2>x^2\end{cases}\end{array}\right.\text{ hay }\left[\begin{array}{l}-1<x<0\\ 0\le x<\frac{1}{\sqrt{2}}\end{array}\right.\Leftrightarrow -1<x<\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

* Với $t>2$ tức $\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}>2\Leftrightarrow x>2\sqrt{1-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<1\\ x^2>4\left(1-x^2\right)\end{cases}$ hay $\frac{2}{\sqrt{5}}<x<1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\left(-1;\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\cup\left(\frac{2}{\sqrt{5}};1\right)$.

2. $\frac{x-\sqrt{x}}{1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}}\ge 1$ ***Đề thi Đại học Khối A – năm 2010.***

Ta có: $2\left(x^2-x+1\right)=2\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{2}>1,\ \forall x\in\mathbb{R}$, nên ta có điều kiện $x\ge 0$

Bất phương trình đã cho tương đương với :

$$x-\sqrt{x}\le 1-\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}\Leftrightarrow\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}\le\sqrt{x}+1-x\ \ (*)$$

Xét 2 vectơ $u=(1;1;0),v=\left(\sqrt{x};1-x;0\right)$,

ta có: $\vec{u}.\vec{v}=\sqrt{x}+1-x$ và $\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=\sqrt{2\left(x^2-x+1\right)}$

Nên $(*)$ có dạng:

$$\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|\le\vec{u}.\vec{v}\Leftrightarrow\begin{cases}\vec{u}=k.\vec{v}\\ k>0\end{cases}\Leftrightarrow\frac{\sqrt{x}}{1}=\frac{1-x}{1}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ x=1-2x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

Vậy, nghiệm của bất phương trình là: $x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}$

Ví dụ 6. Giải các bất phương trình: $\sqrt{3x-1}+3x<\sqrt{x^2+1}+x^2+2$

Lời giải

Điều kiện: $x\ge\frac{1}{3}$

Bất phương trình cho tương đương: $\sqrt{3x-1}-\sqrt{x^2+1}<x^2-3x+2$

$$\Leftrightarrow\frac{3x-1-\left(x^2+1\right)}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x^2+1}}<x^2-3x+2\Leftrightarrow\frac{-x^2+3x-2}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x^2+1}}<x^2-3x+2$$

$$\Leftrightarrow\left(x^2-3x+2\right)\left(\frac{1}{\sqrt{3x-1}+\sqrt{x^2+1}}+1\right)>0\Leftrightarrow x^2-3x+2>0$$

$\Leftrightarrow x<1$ hoặc $x>2$

Đối chiếu điều kiện, bất phương trình có tập nghiệm là $\left[\frac{1}{3};1\right)\cup(2;+\infty)$

Dạng 7. Hệ phương trình – hệ bất phương trình hai ẩn

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn số.

1. Định nghĩa:

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn là hệ có dạng: $\begin{cases}ax+by=c\\ a'x+b'y=c'\end{cases}$, trong đó a,b,c,a',b',c' là các số thực cho trước và a,b,a',b' không đồng thời bằng không.

2. Cách giải: Dùng định thức Crame

Ta có các định thức: $D=\begin{vmatrix}a & b\\ a' & b'\end{vmatrix}$, $D_x=\begin{vmatrix}c & b\\ c' & b'\end{vmatrix}$, $D_y=\begin{vmatrix}a & c\\ a' & c'\end{vmatrix}$.

* Nếu $D\ne 0$ thì hệ có nghiệm duy nhất: $x=\frac{D_x}{D},y=\frac{D_y}{D}$.

* Nếu $D=D_x=D_y=0$ thì hệ vô số nghiệm: $\begin{cases}x\in\mathbb{R}\\ y=\frac{c-ax}{b}\ (b\ne 0)\end{cases}$.

* Nếu $\begin{cases}D=0\\ \left[\begin{array}{l}D_x\ne 0\\ D_y\ne 0\end{array}\right.\end{cases}$ thì hệ đã cho vô nghiệm.

Hệ phương trình bậc hai một ẩn số.

Hệ phương trình đối xứng loại I

1. Định nghĩa:

Đa thức $f(x;y)$ được gọi là đối xứng đối với x,y nếu $f(x;y)=f(y;x)$ với mọi x,y. Hệ có dạng $\begin{cases} f(x;y)=0 \\ g(x;y)=0 \end{cases}$ trong đó $f(x;y), g(x;y)$ là các đa thức đối xứng với x,y được gọi là hệ đối xứng loại I. Trong trường hợp hệ phương trình bậc 2, hệ đối xứng loại I có dạng:

$$\begin{cases} a_1\left(x^2+y^2\right)+b_1xy+c_1(x+y)+d_1=0 \\ a_2\left(x^2+y^2\right)+b_2xy+c_2(x+y)+d_2=0 \end{cases}$$

2. Cách giải: Đặt $S=x+y,\ P=xy$. Biểu diễn $f(x;y), g(x;y)$ qua S và P ta có hệ: $\begin{cases} F(S;P)=0 \\ G(S;P)=0 \end{cases}$ giải hệ này ta tìm được S, P.

Khi đó x,y là nghiệm của phương trình: $X^2-SX+P=0$.

Hệ phương trình đối xứng loại II

1. Định nghĩa:

Hệ phương trình đối xứng loại II là hệ có dạng: $\begin{cases} f(x;y)=0 \\ f(y;x)=0 \end{cases}$, trong đó $f(x;y)$ là một đa thức không đối xứng. Trong trường hợp hệ phương trình bậc hai, hệ đối xứng loại II có dạng:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1xy+c_1y^2+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ c_1x^2+b_1xy+c_1y^2+e_1x+d_1y+f_1=0 \end{cases}$$

2. Cách giải: Trừ hai phương trình của hệ cho nhau ta được:

$$f(x;y)-f(y;x)=0 \Leftrightarrow (x-y)g(x;y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ g(x;y)=0 \end{array}\right.$$

Hệ phương trình đẳng cấp bậc hai

Hệ phương trình bậc 2 hai là hệ có dạng tổng quát:

$$\begin{cases} a_1x^2+b_1y^2+c_1xy+d_1x+e_1y+f_1=0 \\ a_2x^2+b_2y^2+c_2xy+d_2x+e_2y+f_2=0 \end{cases}$$

trong đó $a_i, b_i, c_i, d_i, e_i, f_i\ (i=1,2)$ là các hằng số (hoặc tham số) cho trước và x,y là các ẩn số.

Trong trường hợp tổng quát, phép giải hệ phương trình bậc 2 hai ẩn sẽ dẫn đến phép giải phương trình đại số bậc cao. Tuy nhiên trong khuôn khổ chương trình, phép giải phương bậc cao đa phần đưa về dạng tích như $A^q.B^p=0$.

Nếu một trong hai phương trình của hệ không chứa các số hạng bậc nhất và tự do thì hệ có thể đưa về phương trình bậc hai bằng cách:

- ∗ Xét $y=0$ có phải là nghiệm của hệ hay không?.
- ∗ Xét $y\neq 0$. Đặt $x=ty$.

Ví dụ 1. Xác định $m\in\mathbb{R}$ để hệ : $\begin{cases} (m-2)\sqrt{x}+(m-4)y=2 \\ (m+1)\sqrt{x}+(3m+2)y=-1 \end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất.

Lời giải

Đặt $t=\sqrt{x}$ với $t\geq 0$. Bài toán trở thành: "Tìm $m\in\mathbb{R}$ để hệ phương trình $\begin{cases} (m-2)t+(m-4)y=2 \\ (m+1)t+(3m+2)y=-1 \end{cases}$ có nghiệm duy nhất $t\geq 0$".

Ta có: $D=m(2m-1),\ D_t=7m,\ D_y=-3m$

Nếu $m\neq 0$ và $m\neq \frac{1}{2}$ thì $D\neq 0$. Hệ có nghiệm duy nhất:

$\begin{cases} t=\dfrac{D_t}{D}=\dfrac{7}{2m-1} \\ y=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-3}{2m-1} \end{cases}$ và $t\geq 0 \Rightarrow \dfrac{7}{2m-1}\geq 0$ hay $m>\dfrac{1}{2}$.

Tóm lại: $m>\frac{1}{2}$ thỏa đề bài.

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình:

1. $\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x\ (1) \\ y^2+1=5\left(1+x^2\right)\ (2) \end{cases}$
2. $\begin{cases} 4x^2+y^4-4xy^3=0\ (1) \\ 4x^2+2y^2-4xy=1\ (2) \end{cases}$

Lời giải

1. Từ phương trình (2) suy ra $4=y^2-5x^2$ (3).

Thay (3) vào phương trình (1), ta được: $x^3+\left(y^2-5x^2\right)y=y^3+16x$, phương trình này tương đương với $x=0$ hoặc $x^2-5yx-16=0$.

Trường hợp 1: thay $x=0$ vào phương trình (3) suy ra $y=\pm 2$

Trường hợp 2: từ $x^2-5yx-16=0$ suy ra $y=\dfrac{x^2-16}{5x}, x\neq 0$ (4)

Thay (4) vào (3) và biến đổi ta được: $124x^4+132x^2-256=0$, phương trình này có nghiệm $x^2=1$ tức $x=\pm1$.

Kết luận: hệ đã cho có 4 nghiệm: $(-1;3),(1;-3),(0;-2),(0;2)$.

2. Khi $y=0$, ta có $\begin{cases}4x^2=0\\4x^2=1\end{cases}$ hệ vô nghiệm.

Khi $y\neq0$ nhân cả hai vế của (2) cho y^2 ta có hệ

$$\begin{cases}4x^2+y^4-4xy^3=0 & (1)\\4x^2y^2+2y^4-4xy^3=y^2 & (3)\end{cases}$$

Lấy (3) trừ (1) vế theo vế, ta được: $4x^2y^2+y^4-4x^2=y^2$

$$\Leftrightarrow y^2\left(4x^2+y^2\right)-\left(4x^2+y^2\right)=0\Leftrightarrow\left(y^2-1\right)\left(4x^2+y^2\right)=0\Leftrightarrow y=\pm1\Rightarrow x=\pm\frac{1}{2}$$

Vậy hệ có hai nghiệm: $\left(\frac{1}{2};1\right),\left(-\frac{1}{2};-1\right)$.

Ví dụ 3.

Xác định $m\in\mathbb{R}$ để hệ : $\begin{cases}x+xy+y=m+2\\x^2y+xy^2=m+1\end{cases}$ có nghiệm thực duy nhất,

Lời giải

Nếu $(x_0;y_0)$ là nghiệm của hệ thì $(y_0;x_0)$ cũng là nghiệm của hệ . Do đó hệ có nghiệm duy nhất thì điều kiện cần là $x_0=y_0$.

Khi đó hệ cho tương đương $\begin{cases}x_0^2+2x_0=m+2\\2x_0^3=m+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_0^3-x_0^2-2x_0+1=0\\m=2x_0^3-1\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(x_0-1)\left(x_0^2+x_0-1\right)=0\\m=2x_0^3-1\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x_0=-1\Rightarrow m=-3\\x_0=\frac{1}{2}\Rightarrow m=-\frac{3}{4}\\x_0=1\Rightarrow m=1\end{array}\right.$$

Điều kiện đủ:

Trường hợp 1: $m=1$ hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}x+xy+y=3\\x^2y+xy^2=2\end{cases}$

Nhận thấy vế trái của các phương trình thành phần của hệ là các đa thức đối xứng đối với x và y.

Đặt $S=x+y,P=xy$, điều kiện: $S^2\geq4P$.

Hệ phương trình trên trở thành $\begin{cases}S+P=3\\PS=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=3-S\\S(3-S)=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=1\\P=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}S=2\\P=1\end{cases}$.

Đối chiếu điều kiện $S^2\geq4P$, suy ra $\begin{cases}S=2\\P=1\end{cases}$ thỏa bài toán.

Khi đó x,y là nghiệm phương trình: $X^2-SX+P=0$ hay $(X-1)^2=0$ suy ra $X=1$.

Hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $(x;y)=(1;1)$.

Trường hợp 2: $m=-\frac{3}{4}$ hệ phương trình đã cho trở thành $\begin{cases}x+xy+y=\frac{5}{4}\\x^2y+xy^2=\frac{1}{4}\end{cases}$

Giải tương tự, hệ phương trình trên có nghiệm duy nhất $m=\sqrt{2}$.

Trường hợp 3: $(-x;-y)$ hệ phương trình đã cho trở thành $\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m<\frac{2}{3}\\3-\sqrt{5}<m<3+\sqrt{5}\end{array}\right.$

Giải tương tự, hệ phương trình trên có $x<-1$ nghiệm

$$\frac{m(4-m)}{2m-4}\geq-1\Leftrightarrow\frac{-m^2+6m-4}{m-2}\geq0\ \ (1;-2).$$

Vậy: $m=-\frac{3}{4}$ hoặc $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Nhận thấy rằng: hệ phương trình đã cho có 1 hoặc 3 nghiệm thực. Như vậy nếu (x,y) là nghiệm của hệ thì x,y là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$ và có biệt thức $\Delta=S^2-4P$. Do đó cứ 1 cặp $(S;P)$ thỏa mãn điều kiện $S^2-4P>0$ thì sẽ cho tương ứng hai cặp nghiệm có dạng $(x;y),(y;x)$ và 1 cặp $(S;P)$ thỏa $S^2-4P=0$ sẽ cho tương ứng với 1 cặp nghiệm dạng

$$\begin{cases}\sqrt{x^2+2}+|y|=m\\\sqrt{y^2+2}+|x|=2m-\sqrt{2}\end{cases}.$$

Từ nhận xét trên, chúng ta tham khảo cách giải sau:

Đặt $S=x+y,P=x.y$. Với điều kiện $S^2-4P\geq0$, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases}S+P=m+2\\PS=m+1\end{cases}(\text{I})\Leftrightarrow\begin{cases}S_1=1\\P_1=m+1\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}S_2=m+1\\P_2=m\end{cases}$$

Vì $(x;y)$ là nghiệm của hệ đã cho cứ 1 nghiệm $(S;P)$ của hệ (I) thỏa:

$S^2-4P<0$ thì không tương ứng với nghiệm nào của hệ (I)

$S^2-4P=0$ thì tương ứng với 1 nghiệm dạng $(x;x)$ của hệ (I)

$S^2-4P>0$ thì tương ứng với 2 nghiệm dạng $(x;y),(y;x)$ của hệ (I)

Hệ có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi:

Trường hợp 1: $\begin{cases}S_1=S_2\\ S_1^2-4P_1=0\end{cases}$ trường hợp này không thỏa.

Trường hợp 2: $\begin{cases}S_1^2-4P_1=0\\ S_2^2-4P_2<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1^2-4(m+1)=0\\ (m+1)^2-4<0\end{cases}\Rightarrow m=-\dfrac{3}{4}$

Trường hợp 3: $\begin{cases}S_2^2-4P_2=0\\ S_1^2-4P_1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)^2-4=0\\ 1^2-4(m+1)<0\end{cases}\Rightarrow m=1$

Vậy: $m=-\dfrac{3}{4}$ hoặc $m=1$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

* **Mở rộng 1**: Nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$ và có biệt thức $\Delta=S^2-4P$. Do đó cứ 1 cặp (S; P) thỏa mãn điều kiện $S^2-4P>0$ thì sẽ cho tương ứng hai cặp nghiệm có dạng (x; y), (y; x). Như vậy, 2 cặp (S; P) thỏa mãn điều kiện $S^2-4P>0$ thì sẽ cho tương ứng bốn cặp nghiệm có dạng (x; y), (y; x).

Từ đó ta có bài toán mới : Tìm các giá trị tham số thực m ***để hệ trên có*** 4 ***nghiệm thực phân biệt.***

Gợi ý: Nếu (x, y) là nghiệm của hệ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$ và có biệt thức $\Delta=S^2-4P$. Do đó cứ 1 cặp (S; P) thỏa mãn điều kiện $S^2-4P>0$ thì sẽ cho tương ứng hai cặp nghiệm có dạng $(x;y),(y;x)$.

Do đó hệ có 4 nghiệm phân biệt khi và chỉ khi $\begin{cases}S_1\neq S_2\\ S_1^2-4P_1>0\Rightarrow m<-3\\ S_2^2-4P_2>0\end{cases}$

* **Mở rộng 2**: Qua lời giải trên, việc tìm được $m=-\dfrac{3}{4}$ hoặc $m=1$ để hệ có nghiệm thực duy nhất, hoặc $m=-3$ hệ có 3 nghiệm phân biệt thực, hoặc bài toán đề cập tìm các giá trị $m\in\mathbb{R}$ để hệ có nhiều hơn 3 nghiệm... Như vậy, bài toán có thể quy về : "tìm các giá trị $m\in\mathbb{R}$ để hệ có nghiệm thực". Nếu (x; y) là nghiệm của hệ thì x, y là nghiệm của phương trình $X^2-SX+P=0$ và hệ có nghiệm khi $S^2-4P\geq 0$.

Ví dụ 4. Giải các hệ phương trình:

1. $\begin{cases}2x^2-4x=3y^2-5(1)\\ 2x^2-4x=3y^2-5(2)\end{cases}$

2. $\begin{cases}\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-y}=4\ (1)\\ \sqrt{2y+3}+\sqrt{4-x}=4\ (2)\end{cases}$

3. $\begin{cases}x^3y-y^4=80(1)\\ x^2y+2xy^2+y^3=100(2)\end{cases}$

4. $\begin{cases}9y^3\left(3x^3-1\right)=-125\\ 45x^2y+75x=6y^2\end{cases}$

Lời giải

1. Lấy $(1)-(2)$ và rút gọn ta được: $5\left(x^2-y^2\right)-4(x-y)=0$, phương trình này tương đương với $(x-y)(5x+5y-4)=0$ tức $5x+5y-4=0$ hoặc $x=y$.

* Với $5x+5y-4=0$ tức $y=\dfrac{4-5x}{5}$ thay vào phương trình (1) ta được $2x^2-4x=3\left(\dfrac{4-5x}{5}\right)^2-5$ và rút gọn đưa phương trình về dạng $25x^2-20x-77=0$, giải phương trình này được 2 nghiệm $x=-\dfrac{7}{5}$ hoặc $x=\dfrac{11}{5}$.

Trường hợp này nghiệm của hệ là: $\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{11}{5}\right),\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{7}{5}\right)$.

* Với $x=y$ thay vào phương trình (1) và giải được $x=-5$ hoặc $x=1$. Trường hợp này nghiệm của hệ là: $(-5;-5),(1;1)$.

Vậy hệ phương trình đã cho có 1 nghiệm $(-5;-5),(1;1)$, $\left(-\dfrac{7}{5};\dfrac{11}{5}\right)$, $\left(\dfrac{11}{5};-\dfrac{7}{5}\right)$.

2. Điều kiện: $-\dfrac{3}{2}\leq x\leq 4,\ -\dfrac{3}{2}\leq y\leq 4$.

Cách 1: Trừ (1) và (2) vế theo vế ta được:

$\left(\sqrt{2x+3}-\sqrt{2y+3}\right)+\left(\sqrt{4-y}-\sqrt{4-x}\right)=0\ (1)$

Phương trình (1) $\Leftrightarrow\dfrac{(2x+3)-(2y+3)}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\dfrac{(4-y)-(4-x)}{\sqrt{4-y}+\sqrt{4-x}}=0$

$\Leftrightarrow(x-y)\left(\dfrac{2}{\sqrt{2x+3}+\sqrt{2y+3}}+\dfrac{1}{\sqrt{4-y}+\sqrt{4-x}}\right)=0\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào phương trình (1), ta được:

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=4$, bình phương 2 vế và rút gọn ta được:

$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+12}=9-x\Leftrightarrow\begin{cases}9-x\geq 0\\ 9x^2-38x+33=0(*)\end{cases}$

Giải phương trình $(*)$ ta được $x=3$ hoặc $x=\frac{11}{9}$ thỏa điều kiện $x\le 9$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm phân biệt $\begin{cases} x=3 \\ y=3 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} x=\frac{11}{9} \\ y=\frac{11}{9} \end{cases}$

Cách 2: Phương trình (1) viết lại: $\sqrt{2x+3}-\sqrt{4-x}=\sqrt{2y+3}-\sqrt{4-y}\,(3)$

Xét hàm số $f(t)=\sqrt{2t+3}-\sqrt{4-t}$ xác định trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\,4\right]$

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{\sqrt{2t+3}}+\frac{1}{2\sqrt{4-t}}>0,\ \forall t\in\left(-\frac{3}{2};\,4\right)$, do đó hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên đoạn $\left[-\frac{3}{2};\,4\right]$

Suy ra (3) tương đương với $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay $x=y$ vào phương trình (1), ta được:

$\sqrt{2x+3}+\sqrt{4-x}=4$, bình phương 2 vế và rút gọn ta được:

$$\Leftrightarrow 2\sqrt{-2x^2+5x+12}=9-x\Leftrightarrow\begin{cases} 9-x\ge 0 \\ 9x^2-38x+33=0(*) \end{cases}$$

Giải phương trình $(*)$ ta được $x=3$ hoặc $x=\frac{11}{9}$ thỏa điều kiện $x\le 9$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(3;3)$, $\left(\frac{11}{9};\frac{11}{9}\right)$.

3. Hệ phương trình cho viết lại : $\begin{cases} y\left(x^3-y^3\right)=278(1) \\ y(x+y)^2=100(2) \end{cases}$ suy ra $x>0, y>0$.

Phương trình $(2)\Rightarrow x=\frac{10}{\sqrt{y}}-y\ \ (3)$

Thay (3) vào (1) ta được: $y\left[\left(\frac{10}{\sqrt{y}}-y\right)^3-y^3\right]=278\ \ (4)$.

Đặt $t=\sqrt{y}, t>0$, phương trình (4) trở thành $t^2\left[\left(\frac{10}{t}-t^2\right)^3-\left(t^2\right)^3\right]=278$

phương trình này tương đương với: $t^9-\left(10-t^3\right)^3+278t=0\ \ \ (5)$.

Xét hàm số $f(t)=t^9-\left(10-t^3\right)^3+278t$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=9t^8+9\left[t\left(10-t^3\right)\right]^2+278>0,\forall t>0\Rightarrow f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(1)=0$. Suy ra phương trình (5) có nghiệm $t=1$ tức $\sqrt{y}=1$ hay $y=1\Rightarrow x=9$.

Vậy hệ phương trình cho có nghiệm $(x;y)$ là $(9;1)$.

4. Cách 1: $\begin{cases} 9y^3\left(3x^3-1\right)=-125 \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 27x^3y^3+125=9y^3(1) \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}$

Từ phương trình $(1)\Rightarrow y\ne 0$

Hệ phương trình

$$\begin{cases} 27x^3y^3+125=9y^3(1) \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 27x^3+\frac{125}{y^3}=9 \\ \frac{45x^2}{y}+\frac{75x}{y^2}=6 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} (3x)^3+\left(\frac{5}{y}\right)^3=9 \\ 3x.\frac{5}{y}\left(3x+\frac{5}{y}\right)=6 \end{cases}(*)$$

Đặt $\begin{cases} u=3x \\ v=\frac{5}{y} \end{cases}$. Hệ $(*)\Leftrightarrow\begin{cases} u^3+v^3=9 \\ uv(u+v)=6 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}$

* Với $\begin{cases} u=2 \\ v=1 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=5 \end{cases}$ * Với $\begin{cases} u=1 \\ v=2 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases}$

Cách 2: $\begin{cases} 9y^3\left(3x^3-1\right)=-125 \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 27x^3y^3+125=9y^3(1) \\ 45x^2y+75x=6y^2 \end{cases}(**)$

Từ phương trình $(1)\Rightarrow y\ne 0$.

Hệ $(**)\Leftrightarrow\begin{cases} 27x^3y^3+125=9y^3 \\ 45x^2y^2+75xy=6y^3 \end{cases}\Rightarrow 54x^3y^3-135x^2y^2-225xy+250=0$, ta đặt $t=xy$, ta được phương trình : $54t^3-135t^2-225t+250=0$

$$\Leftrightarrow(3t-10)(6t-5)(3t+5)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} t=\frac{10}{3} \\ t=\frac{5}{6} \\ t=-\frac{5}{3} \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} xy=\frac{10}{3} \\ xy=\frac{5}{6} \\ xy=-\frac{5}{3} \end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{2}{3} \\ y=5 \end{cases} \\ \begin{cases} x=\frac{1}{3} \\ y=\frac{5}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $(x;y)=\left(\frac{2}{3};5\right),\left(\frac{1}{3};\frac{5}{2}\right)$.

Ví dụ 5. Giải các hệ phương trình:

1. $\begin{cases}6x^2+y^2-5xy-7x+3y+2=0(1)\\ x^3+\sqrt{x-1}=y^3+\sqrt{y-1}(2)\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}x^3(2+3y)=1 & (1)\\ x\left(y^3-2\right)=3 & (2)\end{cases}$

3. $\begin{cases}(2x+y)^2-5\left(4x^2-y^2\right)+6(2x-y)^2=0\\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}$

4. $\begin{cases}\sqrt{x^2-xy}+\sqrt{xy-y^2}=3(x-y)\\ x^2-y^2=369\end{cases}$ **5.** $\begin{cases}6\dfrac{x}{y}-2=\sqrt{3x-y}+3y\\ 2\sqrt{3x+\sqrt{3x-y}}=6x+3y-4\end{cases}$

Lời giải

1. Điều kiện: $x\ge 1, y\ge 1$.

Phương trình (2) có dạng $f(x)=f(y)$.

Xét hàm số $f(t)=t^3+\sqrt{t-1}$ với $t\ge 1$.

Ta có: $f'(t)=3t^2+\dfrac{1}{2\sqrt{t-1}}>0,\forall t>1\Rightarrow f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[1;+\infty)$

và $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Thay $x=y$ vào phương trình (1) ta được: $x^2-2x+1=0$ tức $x=1$

Vậy hệ đã cho có nghiệm: $(x;y)=(1;1)$.

Chú ý : Phương trình $(1)\Leftrightarrow[y-(3x-2)][y-(2x-1)=0]$.

2. Dễ thấy $y=\sqrt[3]{2}$ không là nghiệm của hệ.

Với $y\ne\sqrt[3]{2}$, phương trình (2) suy ra $x=\dfrac{3}{y^3-2}$.

Thay $x=\dfrac{3}{y^3-2}$ vào phương trình (1), ta được:

$$\left(\frac{3}{y^3-2}\right)^3(2+3y)=1 \text{ tức } \frac{27(2+3y)}{\left(y^3-2\right)^3}=1(*)$$

Xét hàm số $f(y)=\dfrac{27(2+3y)}{\left(y^3-2\right)^3}-1$ với $y\ne\sqrt[3]{2}$.

Ta có: $f'(y)=-\dfrac{81\left(8y^3+6y^2+2\right)}{\left(y^3-2\right)^3}$ và $f'(y)=0$ khi và chỉ khi $y=-1$.

Lập bảng biến thiên, từ đó suy ra: phương trình $(*)$ không có nghiệm trên các khoảng $(-\infty;-1)$ và $\left(-1;\sqrt[3]{2}\right)$.

Phương trình có 1 nghiệm $y=-1$ và 1 nghiệm trong khoảng $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$. Dễ thấy $y=2$ là 1 nghiệm thuộc khoảng $\left(\sqrt[3]{2},+\infty\right)$.

Vậy hệ đã cho có 2 nghiệm: $(x;y)=(-1;-1),\left(\frac{1}{2};2\right)$.

3. $\begin{cases}(2x+y)^2-5\left(4x^2-y^2\right)+6(2x-y)^2=0 & (1)\\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3 & (2)\end{cases}$

Điều kiện: $2x-y\ne 0$. $(1)\Leftrightarrow\left(\dfrac{2x+y}{2x-y}\right)^2-5\dfrac{2x+y}{2x-y}+6=0$.

Đặt $t=\dfrac{2x+y}{2x-y}$, ta có phương trình: $t^2-5t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=2\\ t=3\end{array}\right.$

* Với $t=2$ tức $\dfrac{2x+y}{2x-y}=2\,(3)$.

Từ (2) và (3), ta có hệ: $\begin{cases}\dfrac{2x+y}{2x-y}=2\\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3y}{2}\\ 8y^2-6y+1=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{3}{4}\\ y=\dfrac{1}{2}\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=\dfrac{3}{8}\\ y=\dfrac{1}{4}\end{cases}$. Hệ cho có nghiệm: $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{8};\frac{1}{4}\right)$

* Với $t=3$ tức $\dfrac{2x+y}{2x-y}=3$ (4). Từ (2) và (4), ta có hệ:

$$\begin{cases}\dfrac{2x+y}{2x-y}=3\\ 2x+y+\dfrac{1}{2x-y}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y\\ 3y^2-3y+1=0\end{cases}$$

Vậy, cho có nghiệm: $\left(\frac{3}{4};\frac{1}{2}\right),\left(\frac{3}{8};\frac{1}{4}\right)$

4. Điều kiện: $\begin{cases} x\ge 0 \\ y\ge 0 \\ x-y\ge 0 \end{cases}$

Đặt: $\begin{cases} u=\sqrt{x^2-xy}\ ,u\ge 0 \\ v=\sqrt{xy-y^2}\ \ ,v\ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2+v^2=x^2-y^2 \\ u^2-v^2=(x-y)^2\ \ ,u\ge v \end{cases}$

Hệ cho trở thành: $\begin{cases} u+v=3\sqrt{u^2-v^2} \\ u^2+v^2=369 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{u+v}.\left(\sqrt{u+v}-3\sqrt{u-v}\right)=0 \\ u^2+v^2=369 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} u+v=0 \\ u^2+v^2=369 \end{cases}$ (I) hoặc $\begin{cases} \sqrt{u+v}=3\sqrt{u-v} \\ u^2+v^2=369 \end{cases}$ (II)

$(I) \Rightarrow \begin{cases} u=v=0(\text{vì } u\ge 0, v\ge 0) \\ 0=369 \end{cases}$ nên hệ vô nghiệm.

$(II) \Leftrightarrow \begin{cases} u+v=9(u-v) \\ u^2+v^2=369 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v=\frac{4u}{5} \\ u^2=225 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=15\ \ (\text{vì} u\ge 0) \\ v=12 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2-xy}=15 \\ \sqrt{xy-y^2}=12 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-xy=225 \\ xy-y^2=144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2=81 \\ x^2-y^2=369 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=9\ (\text{vì } x\ge y) \\ x+y=41 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=25 \\ y=16 \end{cases}$

Vậy, nghiệm của hệ phương trình là: $(25;16)$.

5. Điều kiện: $\sqrt{3x-y}\ge 0, 3x+\sqrt{3x-y}\ge 0, y\ne 0$

Phương trình $6\frac{x}{y}-2=\sqrt{3x-y}+3y \Leftrightarrow 2(3x-y)-y\sqrt{3x-y}-3y^2=0$

Đặt $\sqrt{3x-y}=t, t\ge 0$ suy ra $2t^2-yt-3y^2=0$ (1) có $\Delta_t=25y^2\ge 0\Rightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm $t=-y$ hoặc $t=\frac{3}{2}y$.

* Với $t=-y$ tức $\sqrt{3x-y}=-y \Leftrightarrow \begin{cases} y<0 \\ 3x=y^2+y \end{cases}$ (2) thay vào phương trình sau ta được: $2\sqrt{y^2}=2y^2+5y-4$

$\Leftrightarrow -2y=2y^2+5y-4 \Leftrightarrow 2y^2+7y-4=0 \Leftrightarrow y=-4$ hoặc $y=\frac{1}{2}$.

Thay $y=-4$ vào (2) ta được $x=4$, suy ra: $(4;-4)$ là nghiệm hệ.

* Với $t=\frac{3}{2}y$ tức : $\sqrt{3x-y}=\frac{3}{2}y \Leftrightarrow \begin{cases} y>0 \\ 3x=\frac{9}{4}y^2+y \end{cases}$ (3) thay vào phương trình sau ta được:

$$2\sqrt{\frac{9}{4}y^2+\frac{5}{2}y}=\frac{9}{2}y^2+5y-4 \Rightarrow 2u^2-2u-4=0 \text{ với } \sqrt{\frac{9}{4}y^2+\frac{5}{2}y}=u\ \ (u\ge 0),$$

tìm được $u=2$ thỏa bài toán

Với $u=2$ tức $9y^2+10y-16=0 \Leftrightarrow y=\frac{8}{9}$ hoặc $y=-2$ (không thỏa (3)).

Thay $y=\frac{8}{9}$ vào (3) ta được $x=\frac{8}{9}$, suy ra $\left(\frac{8}{9};\frac{8}{9}\right)$ là nghiệm.

Vậy, hệ cho có nghiệm là: $\left(\frac{8}{9};\frac{8}{9}\right), (4;-4)$.

Ví dụ 6. Giải các hệ phương trình:

1. $\begin{cases} \left(3-\frac{5}{y+42x}\right)\sqrt{2y}=\frac{101}{17} \\ \left(3+\frac{5}{y+42x}\right)\sqrt{x}=\frac{103}{17} \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}=3(1) \\ y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}=0\ \ (2) \end{cases}$

Lời giải

1. Điều kiện: $x>0, y>0$

Hệ phương trình đã cho viết lại: $\begin{cases} 3-\frac{5}{y+42x}=\frac{101}{17\sqrt{2y}}(a) \\ 3+\frac{5}{y+42x}=\frac{103}{17\sqrt{x}}(b) \end{cases}$, hệ phương trình này

tương đương với hệ: $\begin{cases} 6=\frac{101}{17\sqrt{2y}}+\frac{103}{17\sqrt{x}} & (b)+(a) \\ \frac{10}{y+42x}=\frac{103}{17\sqrt{x}}-\frac{101}{17\sqrt{2y}} & (b)-(a) \end{cases}$

Nhân vế theo vế của 2 phương trình trên ta được: $\frac{60}{y+42x}=\frac{103^2}{17^2.x}-\frac{101^2}{17^2.2y}$,

quy đồng mẫu số và rút gọn ta được $2.(103y)^2+84.6275xy-42.(101x)^2=0$, phương trình này được phân tích thành: $(2y-x)\left(103^2y+101^2.42x\right)=0$ suy ra $x=2y$ vì $103^2y+101^2.42x>0$ với $x>0,y>0$.

Thay $x=2y$ vào phương trình (b) ta được: $3+\dfrac{5}{y+42(2y)}=\dfrac{103}{17\sqrt{2y}}$, quy đồng mẫu số và rút gọn phương trình: $51y-\dfrac{103}{\sqrt{2}}\sqrt{y}+1=0$, phương trình này tương đương với: $\left(\sqrt{y}-\sqrt{2}\right)\left(51\sqrt{y}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$ tức $y=2$ hoặc $y=\dfrac{1}{5202}$.

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm $(4;2)$, $\left(\dfrac{1}{2601};\dfrac{1}{5202}\right)$.

2. Hệ đã cho viết lại $\begin{cases} xy\left(x^2+y^2\right)+(3x-y)y=3y\left(x^2+y^2\right)(3) \\ xy\left(x^2+y^2\right)-(x+3y)x=0 \ \ (4) \end{cases}$

Lấy $(3)+(4)$ và rút gọn ta được: $2xy-1=3y$ tức $x=\dfrac{3y+1}{2y}$

Thay $x=\dfrac{3y+1}{2y}$ vào phương trình (2) ta được: $y\left[\left(\dfrac{3y+1}{2y}\right)^2+y^2\right]-\dfrac{3y+1}{2y}-3y=0$, phương trình tương đương với $4y^4-3y^2-1=0$ phương trình này có nghiệm $y^2=1$ tức $y=\pm1$

Vậy hệ phương trình đã cho có 2 nghiệm $(1;-1),(2;1)$.

Ví dụ 7. Giải các hệ phương trình:

1. $\begin{cases} (x-3)(x+4)=y(y-7) \\ \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{2y}}=\dfrac{2}{\sqrt{2y}}+\sqrt{2+\dfrac{1}{4x}} \end{cases}$ **2.** $\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{x}}+\dfrac{y}{x}=2\left(\dfrac{\sqrt{x}}{y}+1\right) \\ y\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3} \end{cases}$

Lời giải

1. Điều kiện $x>0,\ y>0$

Phương trình đầu viết lại: $(x-1)^2+3(x-1)=(2-y)^2+3(2-y)$

Xét hàm số $f(t)=t^2+3t,\ t>0$

Ta có: $f'(t)=2t+3>0,\ \ \forall t>0$ suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$.

Khi đó phương trình đầu $\Leftrightarrow x-1=2-y \Leftrightarrow\ x=3-y$

Đặt $v=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, $u=\dfrac{1}{\sqrt{2y}}$ và $u>0,\ v>0$

Phương trình thứ 2 trở thành: $2v+\sqrt{2+u^2}=2u+\sqrt{2+v^2}$ hay

$$2v-\sqrt{2+v^2}=2u-\sqrt{2+u^2}\ (*)$$

Xét $g(a)=2a-\sqrt{2+a^2}$, $a>0$

Ta có: $g'(a)=2-\dfrac{a}{\sqrt{2+a^2}}=\dfrac{2\sqrt{2+a^2}-a}{\sqrt{2+a^2}}>\dfrac{2|a|-a}{\sqrt{2+a^2}}>0\Rightarrow g(a)$ đồng biến trên khoảng $(0:+\infty)$. Khi đó $(*)\Leftrightarrow u=v$ hay $y=2x$.

Vậy, ta có hệ: $\begin{cases} x=3-y \\ y=2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases}$

2. Điều kiện: $x>0,\ y\neq0$

Phương trình (3) tương đương với $y\sqrt{x}+y^2=2x\sqrt{x}+2xy$

$\Leftrightarrow\left(y\sqrt{x}-2x\sqrt{x}\right)+\left(y^2-2xy\right)=0$ hay $(y-2x)\left(y+\sqrt{x}\right)=0$

TH1: $y=2x$ thay vào phương trình (4) ta được: $2x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=\sqrt{3x^2+3}$

$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}\left(2x-\sqrt{3}\right)=2x$ suy ra $\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}=\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}$ (*) (vì $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ không là nghiệm)

Xét hàm số $f(x)=\sqrt{x^2+1}$ và $g(x)\dfrac{2x}{2x-\sqrt{3}}$ trên khoảng $(0;+\infty)$

Ta có: $f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}>0$, $\forall x>0$ nên hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và

$g'(x)\dfrac{-2\sqrt{3}}{\left(2x-\sqrt{3}\right)^2}<0$, $\forall x>0$ nên hàm số nghịch biến trên khoảng $(0;+\infty)$ vì thế phương trình (*) có không quá 1 nghiệm trên khoảng $(0;+\infty)$, hơn nữa $f\left(\sqrt{3}\right)=g\left(\sqrt{3}\right)$, suy ra $x=\sqrt{3}$ là nghiệm duy nhất của phương trình (*).

Do đó $(x;y)=\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$ là nghiệm của hệ.

TH2: $y=-\sqrt{x}$, thay vào phương trình (4) ta được $\sqrt{3x^2+3}+\sqrt{x}\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=0$ (5)

Dễ thấy phương trình (5) không có nghiệm thực.

Vậy, hệ đã cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\sqrt{3};2\sqrt{3}\right)$.

Dạng 8. Phương trình – bất phương trình mũ

Bài toán 1: Biến đổi, quy về cùng cơ số.

Ta sử dụng phép biến đổi tương đương sau:

$$a^{f(x)}=a^{g(x)} \Leftrightarrow a=1 \text{ hoặc } \begin{cases}0<a\ne 1\\ f(x)=g(x)\end{cases}$$

Logarit hóa và đưa về cùng cơ số .

Dạng 1: Phương trình: $a^{f(x)}=b \Leftrightarrow \begin{cases}0<a\ne 1, b>0\\ f(x)=\log_a b\end{cases}$

Dạng 2: Phương trình :

$$a^{f(x)}=b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{f(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).\log_a b$$

$$\text{hoặc } \log_b a^{f(x)}=\log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a=g(x).$$

Ví dụ Giải các phương trình:

1. $5^{x^2}-3^{x^2+1}=2\left(5^{x^2-1}-3^{x^2-2}\right)$ **2.** $81^{\frac{x+10}{x-10}}=\frac{1}{27}.27^{\frac{x+5}{x-15}}$

Lời giải

1. Phương trình cho tương đương với: $5^{x^2}-3.3^{x^2}=\frac{2}{5}5^{x^2}-\frac{2}{9}3^{x^2}$

$\Leftrightarrow 5^{x^2}-\frac{2}{5}5^{x^2}=3.3^{x^2}-\frac{2}{9}3^{x^2} \Leftrightarrow \frac{3}{5}5^{x^2}=\frac{25}{9}3^{x^2}$

$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}=\frac{125}{27} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{3}\right)^{x^2}=\left(\frac{5}{3}\right)^{3} \Rightarrow x^2=3$ tức $x=\pm\sqrt{3}$

Vậy, phương trình cho có nghiệm $x=\pm\sqrt{3}$

2. Điều kiện: $x\ne 10,\ x\ne 15$

$81^{\frac{x+10}{x-10}}=\frac{1}{27}.27^{\frac{x+5}{x-15}} \Leftrightarrow 3^{\frac{4x+40}{x-10}}=3^{\frac{60}{x-15}} \Leftrightarrow \frac{4x+40}{x-10}=\frac{60}{x-15}$,

quy đồng rồi rút gọn ta được: $x^2-20x=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=20$.

Vậy, phương trình cho có nghiệm $x=0,\ x=20$.

Bài toán 2: Đặt ẩn phụ $f\left[a^{g(x)}\right]=0 \quad (0<a\ne 1) \Leftrightarrow \begin{cases}t=a^{g(x)}>0\\ f(t)=0\end{cases}$

* ***Dạng 1:*** Ta có dạng tổng quát của bài toán trên là: $F\left(a^{f(x)}\right)=0$.Với dạng này ta đặt $t=a^{f(x)}$, $t>0$ và chuyển về phương trình $F(t)=0$, giải tìm nghiệm dương t của phương trình, từ đó ta tìm được x. Ta thường gặp dạng: $m.a^{2f(x)}+n.a^{f(x)}+p=0$. Với bất phương trình ta cũng làm tương tự.

* ***Dạng 2:*** $m.a^{f(x)}+n.b^{f(x)}+p=0$, trong đó $a.b=1$.

Đặt $t=a^{f(x)},\ t>0 \Rightarrow b^{f(x)}=\frac{1}{t}$.

* ***Dạng 3:*** $m.a^{2f(x)}+n.(a.b)^{f(x)}+p.b^{2f(x)}=0$. Chia 2 vế phương trình cho $b^{2f(x)}$ và đặt $t=\left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)}$, $t>0$. Ta có phương trình : $mt^2+nt+p=0$

Ví dụ. Giải phương trình:

1. $10^{1+x^2}-10^{1-x^2}=99$ **2.** $25^{2x-x^2+1}+9^{2x-x^2+1}=34.15^{2x-x^2}$

Lời giải

1. Phương trình cho tương đương: $10.10^{x^2}-\frac{10}{10^{x^2}}=99$ (*)

Đặt $t=10^{x^2}$, $t>0$. Khi đó phương trình (*) trở thành:

$10t^2-99t-10=0 \Leftrightarrow t=10$ thỏa điều kiện $t>0$

Với $t=10$ tức $10^{x^2}=10 \Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=-1$ hoặc $x=1$

Vậy, phương trình cho có nghiệm $x=-1$ hoặc $x=1$.

2. Phương trình cho tương đương: $25.\left(\frac{25}{15}\right)^{2x-x^2}+9.\left(\frac{9}{15}\right)^{2x-x^2}=34$ (*)

Đặt $t=\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2}$, $t>0$.

Phương trình (*) trở thành: $25t^2-34t+9=0 \Leftrightarrow t=1$ hoặc $t=\frac{9}{25}$

Với $t=1$ tức $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2}=1=\left(\frac{3}{5}\right)^{0} \Leftrightarrow 2x-x^2=0 \Leftrightarrow x=0$ hoặc $x=2$

Với $t=\frac{9}{25}$ tức $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2}=\left(\frac{3}{5}\right)^{2} \Leftrightarrow 2x-x^2=2 \Leftrightarrow x=1\pm\sqrt{3}$

Vậy, phương trình cho có 4 nghiệm: $x\in\left\{1-\sqrt{3};0;2;1+\sqrt{3}\right\}$.

Bài toán 3: Logarit hóa.

Dạng 1: $a^{g(x)}=f(x) \quad (0<a\ne 1) \Leftrightarrow \begin{cases}f(x)>0\\ g(x)=\log_a f(x)\end{cases}$

Dạng 2: $a^{f(x)}=b^{g(x)} \quad (0<a,b\ne 1) \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)}=\log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)=g(x).\log_a b$

Ví dụ. Giải phương trình:

1. $x^6.5^{-\log_x 5}=5^{-5}$ 2. $49.2^{x^2}=16.7^x$ 3. $8^x.5^{x^2-1}=2^{-3}$

Lời giải

1. Điều kiện: $0<x\ne 1$

Lấy logarit cơ số 5 cả 2 vế phương trình cho ta được:

$$\log_5\left(x^6.5^{-\log_x 5}\right)=\log_5 5^{-5}$$

hay $6\log_5 x-\log_x 5=-5 \Leftrightarrow 6(\log_5 x)^2+5\log_5 x-1=0$ $(*)$

Đặt $t=\log_5 x$, phương trình $(*)$ trở thành $6t^2+5t-1=0$, phương trình này có 2 nghiệm $t=-1$ hoặc $t=\frac{1}{6}$.

Với $t=-1$ tức $\log_5 x=-1 \Leftrightarrow x=5^{-1}=\frac{1}{5}$

Với $t=\frac{1}{6}$ tức $\log_5 x=\frac{1}{6} \Leftrightarrow x=5^{\frac{1}{5}}=\sqrt[6]{5}$

Vậy, phương trình cho có 2 nghiệm: $x\in\left\{\sqrt[6]{5};\frac{1}{5}\right\}$.

2. Phương trình cho tương đương $2^{x^2-4}=7^{x-2}$ $(*)$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế phương trình $(*)$ ta được: $\log_2 2^{x^2-4}=\log_2 7^{x-2}$

$\Leftrightarrow x^2-4=(x-2)\log_2 7 \Leftrightarrow (x-2)(x+2-\log_2 7)=0$

$\Leftrightarrow x=2$ hoặc $x=\log_2 7-2$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x=\log_2 7-2$, $x=2$.

3. Lấy logarit hai vế với cơ số 8, ta được

$$\log_8 8^x.5^{x^2-1}=\log_8\frac{1}{8} \Leftrightarrow \log_8 8^x+\log_8 5^{x^2-1}=\log_8 8^{-1}$$

$\Leftrightarrow x+\left(x^2-1\right)\log_8 5=-1 \Leftrightarrow x+1+\left(x^2-1\right)\log_8 5=0$

$\Leftrightarrow (x+1)+(x+1)(x-1)\log_8 5=0 \Leftrightarrow (x+1)\left[1+(x-1)\log_8 5\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x+1=0\\1+(x-1)\log_8 5=0\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x.\log_8 5=\log_8 5-1\end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\x=1-\log_5 8\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có nghiệm: $x=-1, x=1-\log_5 8$.

Bài toán 4: Biến đổi phương trình về dạng tích.

$$f(x).g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \text{ hoặc } g(x)=0$$

Ví dụ. Giải phương trình: $4^{x^2-3x+2}+4^{2x^2+6x+5}=4^{3x^2+3x+7}+1$

Lời giải

Phương trình cho $\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}+4^{2x^2+6x+5}=4^{x^2-3x+2}.4^{2x^2+6x+5}+1$

$\Leftrightarrow 4^{x^2-3x+2}-1+4^{2x^2+6x+5}-4^{x^2-3x+2}.4^{2x^2+6x+5}=0$

$\Leftrightarrow\left(4^{x^2-3x+2}-1\right)\left(4^{2x^2+6x+5}-1\right)=0$

$4^{x^2-3x+2}=1 \Rightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=2$

$4^{2x^2+6x+5}=1 \Rightarrow 2x^2+6x+5=0$, phương trình này vô nghiệm.

Vậy, phương trình cho có 2 nghiệm $x=1$, $x=2$.

Bài toán 5: Phương pháp đồ thị.

Giải phương trình: $a^x=f(x)$ $(0<a\ne 1)$ $(*)$

$(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y=a^x$ $(0<a\ne 1)$ và $y=f(x)$. Khi đó ta thực hiện 2 bước:

Bước 1: Vẽ đồ thị các hàm số: $y=a^x$ $(0<a\ne 1)$ và $y=f(x)$.

Bước 2: Kết luận nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của 2 đồ thị.

Ví dụ. Giải phương trình: $9^x-2(x+5).3^x+9(2x+1)=0$

Lời giải

Đặt $t=3^x$, $t>0$.

Phương trình cho trở thành: $t^2-2(x+5)t+9(2x+1)=0$ $(*)$, phương trình này có biệt số $\Delta'=(x+5)^2-9(2x+1)=(x-4)^2$

Vì $\Delta'\ge 0$ nên phương trình $(*)$ có 2 nghiệm $t=9$ hoặc $t=2x+1$

Với $t=9$ tức $3^x=9 \Rightarrow x=2$

Với $t=2x+1$ tức $3^x=2x+1$

Xét $f(x)=3^x$ và $g(x)=2x+1$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Do đó, đồ thị của 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại hai giao điểm có hoành độ $x=0$ và $x=1$. Như vậy, $x=0$ và $x=1$ là nghiệm phương trình.

Vậy, phương trình cho có 3 nghiệm: $x=0$, $x=1$, $x=2$.

Bài toán 6: Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Đoán nghiệm. Chứng minh nghiệm duy nhất.

Chuyển phương trình đã cho về dạng $f(x)=k$

Nhẩm 1 nghiệm $x = x_0$, ta chứng minh $x = x_0$ là nghiệm duy nhất.

Với $x = x_0 \Rightarrow f(x) = f(x_0) = k$, suy ra $x = x_0$ là nghiệm phương trình.

Với $x > x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0) = k$, suy ra phương trình vô nghiệm.

Với $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) = k$, suy ra phương trình vô nghiệm.

Tính chất 1*:* Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) trên $(a;b)$ thì số nghiệm của phương trình : $f(x) = k$ (trên $(a;b)$) không nhiều hơn một và $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \quad \forall u, v \in (a;b)$.

Chứng minh: Ta giả sử f là hàm đồng biến trên $(a;b)$

- Nếu $u > v \Rightarrow f(u) > f(v)$
- Nếu $u < v \Rightarrow f(u) < f(v)$

Tính chất 2: Nếu hàm số $y = f(x)$ liên tục và luôn đồng biến (hoặc luôn nghịch biến) ; hàm số $y = g(x)$ liên tục và luôn nghịch biến (hoặc luôn đồng biến) trên D thì số nghiệm trên D của phương trình : $f(x) = g(x)$ không nhiều hơn một.

Chứng minh:

Giả sử f đồng biến còn g nghịch biến trên D và $\exists x_0 \in D : f(x_0) = g(x_0)$.

* Nếu $x > x_0 \Rightarrow f(x_0) > f(x_0) = g(x_0) > g(x) \Rightarrow$ PT:$f(x) = g(x)$ vô nghiệm

* Nếu $x < x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0) = g(x_0) < g(x) \Rightarrow$ PT:$f(x) = g(x)$ vô nghiệm

Vậy $x = x_0$ là nghiệm duy nhất của phương trình $f(x) = g(x)$.

Tính chất 3: Nếu hàm số $y = f(x)$ luôn đồng biến(hoặc luôn nghịch biến) trên D thì $f(u) > f(v) \Leftrightarrow u > v \ (u < v) \quad \forall u, v \in D$.

Tính chất 4: Cho hàm số $y = f(x)$ liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm trên khoảng $(a;b)$. Nếu $f(a) = f(b)$ thì phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm thuộc khoảng $(a;b)$.

Chứng minh:

Giả sử phương trình $f'(x) = 0$ vô nghiệm trên $(a;b)$.

Khi đó $f'(x) > 0 \ \forall x \in (a;b)$ (hoặc $f'(x) < 0 \ \forall x \in (a;b)$).

Suy ra $f(b) > f(a)$ (hoặc $f(b) < f(a)$).

Điều này trái với giả thiết $f(a) = f(b)$.

Vậy phương trình $f'(x) = 0$ có ít nhất một nghiệm trên $(a;b)$.

Từ định lí này, ta có được hai hệ quả sau:

Hệ quả 1: Nếu phương trình $f(x) = 0$ có m nghiệm thì phương trình $f'(x) = 0$ có $m - 1$ nghiệm.

Hệ quả 2: Cho hàm số $y = f(x)$ có đạo hàm đến cấp k liên tục trên $(a;b)$. Nếu phương trình $f^{(k)}(x) = 0$ có đúng m nghiệm thì phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều nhất là $m + 1$ nghiệm.

Thật vậy: Giả sử phương trình $f^{(k-1)}(x) = 0$ có nhiều hơn $m + 1$ nghiệm thì phương trình $f'(x) = 0$ có nhiều hơn m nghiệm, điều này trái với giả thiết bài toán. Từ hệ quả 2 $\Rightarrow$ nếu $f'(x) = 0$ có một nghiệm thì $f(x) = 0$ có nhiều nhất hai nghiệm.

Ví dụ. Giải phương trình:

1. $2^x = 1 + \sqrt{3^x}$

2. $x + \sqrt{x^2 + 1} = 3^x$

3. $2x\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} - 2x\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = 2x^2 - 2x - 1$

Lời giải

1. Biến đổi phương trình cho về dạng: $4^{\frac{x}{2}} = 1 + 3^{\frac{x}{2}}$ hay $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} = 1$

Nhận thấy, $x = 2$ là một nghiệm phương trình.

Hơn nữa, $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$ có $f'(x) < 0, \ \forall x \in \mathbb{R}$ nên luôn nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và hàm số $g(x) = 1$ là hàm hằng.

Do đó, đồ thị của 2 hàm số $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại một giao điểm có hoành độ $x = 2$.

Vậy, $x = 2$ là nghiệm duy nhất của phương trình.

2. Phương trình $\Leftrightarrow \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - x\ln 3 = 0$

Xét hàm số $f(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right) - x\ln 3$, có

$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \ln 3 < 0 \Rightarrow f(x)$ là hàm nghịch biến;

Hơn nữa $f(0) = 0 \Rightarrow x = 0$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

3. Điều kiện: $x \neq 0$.

Phương trình đã cho viết lại: $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}} - \left(\frac{1}{3}\right)^{1-x} = \dfrac{2x^2 - 2x - 1}{2x}$

hay $\left(\sqrt{3}\right)^{\frac{1}{x}}-\left(\frac{1}{3}\right)^{1-x}=-\frac{1}{2x}-(1-x)\Leftrightarrow (3)^{\frac{1}{2x}}+\frac{1}{2x}=3^{x-1}+x-1$ (*).

Xét hàm số $g(t)=3^t+t$ có $g'(t)=3^t\ln 3+1>0,\ \forall t\neq 0, t\in\mathbb{R}$ nên hàm số $g(t)$ đồng biến trên các khoảng $(-\infty;0)$ và $(0;+\infty)$, do đó $(*)\Leftrightarrow$

$$g\left(\frac{1}{2x}\right)=g(x-1)\Leftrightarrow\frac{1}{2x}=x-1\Leftrightarrow 2x^2-2x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1-\sqrt{3}}{2} \text{ hoặc } x=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Vậy, tập nghiệm của phương trình là $S=\left\{\frac{1-\sqrt{3}}{2};\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right\}$.

Chú ý: Cần tìm a, b, c $\in\mathbb{R}$ sao cho $\frac{2x^2-2x-1}{2x}=a\frac{1}{x}+b(x-1)+c$ hay

$\frac{2x^2-2x-1}{2x}=\frac{bx^2+(-b+c)x+a}{x}$, đồng nhất thức hai vế ta tìm được $a=-\frac{1}{2}$, $b=-1,\ c=0$. Vì thế $\frac{2x^2-2x-1}{2x}=-\frac{1}{2x}-(1-x)$.

Bài toán 7: Phương pháp lượng giác hóa.

Chọn cách thích hợp để đặt $a^x=\sin t$ hoặc $a^x=\cos t$, $(0<a\neq 1)$

Ví dụ. Giải phương trình: $\sqrt{1+\sqrt{1-2^{2x}}}=\left(1+2\sqrt{1-2^{2x}}\right).2^x$

Lời giải

Điều kiện: $1-2^{2x}\geq 0\Leftrightarrow 2^{2x}\leq 1\Leftrightarrow x\leq 0$

Với $x\leq 0\Rightarrow 0<2^x\leq 1$, đặt $2^x=\sin t;\ t\in\left(0;\frac{\pi}{2}\right]$.

Phương trình đã cho trở thành: $\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\sin t\left(1+2\sqrt{1-\sin^2 t}\right)$

$$\Leftrightarrow\sqrt{1+\cos t}=(1+2\cos t)\sin t\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=\sin t+\sin 2t$$

$$\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}\Leftrightarrow\sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\cos\frac{t}{2}=0\\ \sin\frac{3t}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{\pi}{6}\\ t=\frac{\pi}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2^x=\frac{1}{2}\\ 2^x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right.$$

Vậy, phương trình cho có 2 nghiệm $x=-1$ hoặc $x=0$.

Bài toán 8: Giải bất phương trình.

Ví dụ. Giải bất phương trình:

1. $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leq\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$ **2.** $\left(\sqrt{5}+1\right)^{-x^2+x}+2^{-x^2+x+1}\leq 3.\left(\sqrt{5}-1\right)^{-x^2+x}$

3. $3^{x^2-4}+\left(x^2-4\right)3^{x+2}\geq 1$ **4.** $\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^5+\sqrt[3]{x}2^{x-1}\geq 1$

Lời giải

1. Điều kiện: $x\neq -1$

Bất phương trình đã cho được viết lại: $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leq\left(\frac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{x}$ tương đương

với $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\leq\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}\Leftrightarrow\frac{6x-6}{x+1}\leq x\Leftrightarrow\frac{x^2-5x+6}{x+1}\geq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\leq 2\\ x\geq 3\end{array}\right.$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm $-1<x\leq 2$ hoặc $x\geq 3$

2. Bất phương trình đã cho được viết lại: $\left(\frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{5}-1}\right)^{-x^2+x}+2.\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{-x^2+x}\leq 3$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{4}{\left(\sqrt{5}-1\right)^2}\right)^{-x^2+x}+2.\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{-x^2+x}-3\leq 0$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{2\left(-x^2+x\right)}+2.\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{-x^2+x}-3\leq 0\quad (*)$$

Đặt: $t=\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{-x^2+x}$, $t>0$

Khi đó bất phương trình (*) trở thành $t^2+2t-3\leq 0\Leftrightarrow -3\leq t\leq 1$

Suy ra $0<\left(\frac{2}{\sqrt{5}-1}\right)^{-x^2+x}\leq 1\Leftrightarrow -x^2+x\leq 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\leq 0\\ x\geq 1\end{array}\right.$

Vậy, bất phương trình cho có tập nghiệm: $(-\infty;0]\cup[1;+\infty)$.

3. Nếu $|x|>2$ thì $x^2-4>0, x-2>0\Rightarrow 3^{x^2-4}>3^0=1\Rightarrow VT>VP$.

Bất phương trình không có nghiệm trong khoảng trên.

Nếu $|x|<2$ thì $x^2-4<0, x-2<0\Rightarrow 3^{x^2-4}<3^0=1, \left(x^2-4\right).3^{x-2}<0\Rightarrow VT>VP$.

Bất phương trình không có nghiệm trong khoảng trên.

Vậy $x=2$ thay vào ta thấy thỏa mãn. Do đó bất phương trình có nghiệm duy nhất $x=2$.

4. Nếu $x<0$ thì $\sqrt[3]{x}<0$ mà $2^{x-1}>0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^5<1,\ \sqrt[3]{x}2^{x-1}<0$

$\Rightarrow VT<1$. Vậy bất phương trình không có nghiệm trong khoảng trên.

Nếu $x\ge 0$ thì $\sqrt[3]{x}\ge 0$ mà $2^{x-1}>0\Rightarrow\left(\sqrt[3]{x}+1\right)^5\ge 1,\ \sqrt[3]{x}2^{x-1}\ge 0\Rightarrow VT\ge 1$.

Vậy bất phương trình có nghiệm $x\ge 0$.

Dạng 9: Phương trình – bất phương trình logarit

* $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)=g(x)\\ f(x)\ge 0\ \left(g(x)\ge 0\right)\end{cases}$

* $\log_a f(x)=b\Leftrightarrow f(x)=a^b$

* $\log_a f(x)\ge\log_a g(x)\ \ (1)$

- Nếu $a>1$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>g(x)\\ g(x)>0\end{cases}$
- Nếu $0<a<1$ thì $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)<g(x)\\ f(x)>0\end{cases}$

Chú ý: $\log_a f(x)$ có nghĩa $\Leftrightarrow\begin{cases}f(x)>0\\ 0<a\ne 1\end{cases}$.

Bài toán 1: Biến đổi, quy về cùng cơ số $\log_a f(x)=\log_a g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}0<a\ne 1\\ f(x)=g(x)>0\end{cases}$

Ví dụ. Giải các phương trình:

1. $\log_3(x-2)^2+\log_{\sqrt{3}}\dfrac{x}{x^2-3x+3}=0$ **2.** $\log_3(x-1)^2+\log_{\sqrt{3}}(2x-1)=2$

Lời giải

1. Điều kiện: $0<x\ne 2$

Cách 1: Phương trình cho viết lại: $\log_3(x-2)^2+\log_3\left(\dfrac{x}{x^2-3x+3}\right)^2=0$

Hay $\log_3(x-2)^2.\left(\dfrac{x}{x^2-3x+3}\right)^2=0$ tức $(x-2)^2.\left(\dfrac{x}{x^2-3x+3}\right)^2=1$,

Giải phương trình này ta được $x=1,\ x=\dfrac{3}{2},\ x=3$.

Cách 2: Phương trình cho viết lại: $\log_3|x-2|+\log_3\dfrac{x}{x^2-3x+3}=0$

Hay $\log_3|x-2|.\left(\dfrac{x}{x^2-3x+3}\right)=0$ tức $|x-2|.\left(\dfrac{x}{x^2-3x+3}\right)=1\ (*)$

- Nếu $0<x<2$ thì $|x-2|=-(x-2)=2-x$.

Khi đó phương trình $(*)$ viết lại: $-x^2+2x=x^2-3x+3\Leftrightarrow x=1$ hoặc $x=\dfrac{3}{2}$.

- Nếu $x>2$ thì $|x-2|=x-2$.

Khi đó phương trình $(*)$ viết lại: $x^2-2x=x^2-3x+3\Leftrightarrow x=3$.

Vậy, phương trình cho có 3 nghiệm $x=1,\ x=\dfrac{3}{2},\ x=3$.

2. Điều kiện: $\begin{cases}(x-1)^2>0\\ 2x-1>0\end{cases}\Rightarrow\dfrac{1}{2}<x\ne 1$.

Phương trình đã cho trở thành: $\log_3|x-1|+\log_3(2x-1)=1$

$\Leftrightarrow\log_3|x-1|(2x-1)=1\Leftrightarrow|x-1|(2x-1)=3\ \ (*)$.

* $\dfrac{1}{2}<x<1$, phương trình $(*)\Leftrightarrow-(x-1)(2x-1)=3$ phương trình này vô nghiệm với $\forall x\in\left(\dfrac{1}{2};1\right)$.

* $x>1$, phương trình $(*)\Leftrightarrow(x-1)(2x-1)=3$, giải phương trình này ta được nghiệm $x=2$ thỏa mãn bài toán.

Vậy phương trình có nghiệm $x=2$.

Bài toán 2: Đặt ẩn phụ.

$$f\left[\log_a g(x)\right]=0\quad(0<a\ne 1)\ \Leftrightarrow\begin{cases}t=\log_a g(x)\\ f(t)=0\end{cases}$$

Công thức đổi cơ số: $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}\Rightarrow\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}\quad\forall a,b,x>0;a,b\ne 1$.

Ví dụ 1. Giải phương trình:

1. $1+\log_{27}\left(x^{\log_{27}x}\right)=\dfrac{10}{3}\log_{27}x$ **2.** $\lg^4(x-1)^2+\lg^2(x-1)^2=25$

Lời giải

1. Điều kiện: $x>0$

Phương trình đã cho được viết lại: $1+\log_{27}^2x=\dfrac{10}{3}\log_{27}x$ (vì $\log_a x^a=a\log_a x$)

$$\Leftrightarrow 3\log_{27}^2x-10\log_{27}x+3=0\ \ (*).$$

Đặt $t=\log_{27}x$, phương trình $(*)$ trở thành:

$3t^2-10t+3=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3}$ hoặc $t=3$.

Với $t=\frac{1}{3}$ tức $\log_{27}x=\frac{1}{3} \Leftrightarrow x=27^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{27}=3$

Với $t=3$ tức $\log_{27}x=3 \Leftrightarrow x=27^3=3^9$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm: $x=3$ hoặc $x=3^9$.

2. Điều kiện: $x>1$

Phương trình đã cho được viết lại: $\left[\lg(x-1)^2\right]^4+\left[\lg(x-1)^3\right]^2=25$

$$\Leftrightarrow 16\lg^4(x-1)+9\lg^2(x-1)=25 \quad (*)$$

Đặt $t=\lg^2(x-1)$ với $t>0$.

Khi đó phương trình $(*)$ trở thành: $16t^2+9t-25=0$, phương trình này có 2 nghiệm $t=-\frac{25}{16}$ (không thỏa điều kiện $t>0$) hoặc $t=1$

Với $t=1$ tức là $\lg^2(x-1)=1 \Leftrightarrow \lg(x-1)=\pm 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-1=10 \\ x-1=\frac{1}{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=11 \\ x=\frac{11}{10} \end{array}\right.$

Vậy, phương trình cho có 2 nghiệm: $x=\frac{11}{10}$ hoặc $x=11$.

Ví dụ 2. Giải phương trình: $(3x-5)\log_3^2x+(9x-19)\log_3x-12=0$

Lời giải

Điều kiện: $x>0$

Đặt $t=\log_3x$, phương trình trở thành: $(3x-5)t^2+(9x-19)t-12=0$

Khi $x=\frac{5}{3}$: phương trình vô nghiệm.

Khi $x\neq\frac{5}{3}$, ta có: $\Delta=(9x-11)^2$, khi đó phương trình có 2 nghiệm $t=-3$ hoặc $t=\frac{4}{3x-5}$.

Với $t=-3$ tức $\log_3x=-3 \Leftrightarrow x=3^{-3}=\frac{1}{27}$

Với $t=\frac{4}{3x-5}$ tức $\log_3x=\frac{4}{3x-5}$

Cách 1: Xét hàm số $f(x)=\log_3x-\frac{4}{3x-5}$ với $0<x\neq\frac{5}{3}$

Ta có: $f'(x)=\frac{1}{x\ln 3}+\frac{12}{(3x-5)^2}>0$, với mọi $0<x\neq\frac{5}{3}$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^-}f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to\left(\frac{5}{3}\right)^+}f(x)=-\infty$

Lập bảng biến thiên, dễ thấy phương trình $f(x)=0$ luôn có 2 nghiệm phân biệt, hơn nữa $f(3)=f\left(\frac{1}{3}\right)=0$ nên phương trình $f(x)=0$ luôn có 2 nghiệm $x=\frac{1}{3}$ hoặc $x=3$.

Vậy, phương trình có 3 nghiệm $x\in\left\{\frac{1}{27};\frac{1}{3};3\right\}$.

Cách 2:

TH1: Nếu $0<x<\frac{5}{3}$: hàm số đồng biến trên khoảng $\left(0;\frac{5}{3}\right)$, hơn nữa $f\left(\frac{1}{3}\right)=0$ nên phương trình cho có nghiệm $x=\frac{1}{3}$.

TH1: Nếu $x>\frac{5}{3}$: hàm số đồng biến trên khoảng $\left(\frac{5}{3};+\infty\right)$, hơn nữa $f(3)=0$ nên phương trình đã cho có nghiệm $x=3$.

Vậy, phương trình có 3 nghiệm $x\in\left\{\frac{1}{27};\frac{1}{3};3\right\}$.

Bài toán 3: Logarit hóa.

$$\log_a g(x)=f(x)\quad(0<a\neq1)\ \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)>0 \\ g(x)=a^{f(x)} \end{cases}$$

Ví dụ . Giải phương trình: $\log_3\left[(x+1)^3+3(x+1)^2+3x+4\right]=2\log_2(x+1)$

Lời giải

Điều kiện $x>-1$

Phương trình đã cho tương đương $\log_3(x+2)^3=2\log_2(x+1)$ hay

$3\log_3(x+2)\ =2\log_2(x+1)$

Đặt $3\log_3(x+2)=2\log_2(x+1)=6t$ suy ra $\begin{cases} x+2=3^{2t} \\ x+1=2^{3t} \end{cases} \Rightarrow 9^t-8^t=1$

tức : $\left(\frac{1}{9}\right)^t+\left(\frac{8}{9}\right)^t=1$ $(*)$

Xét hàm $f(t)=\left(\frac{1}{9}\right)^t+\left(\frac{8}{9}\right)^t$, ta thấy hàm $f(t)$ nghịch biến, lại có $f(1)=1$ nên $t=1$ là nghiệm duy nhất của $(*)$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=7$.

Bài toán 4: Biến đổi phương trình về dạng tích.

$$f(x).g(x)=0 \Leftrightarrow f(x)=0 \text{ hoặc } g(x)=0$$

Ví dụ. Giải phương trình: $x.2^{1-x}+2.\log_2(1+x)=x.\log_2(1+x)+\log_2(x+1)^2$

Lời giải

Điều kiện: $x>-1$

Phương trình đã cho viết lại:

$$x.2^{1-x}+2.\log_2(1+x)-x.\log_2(1+x)-2\log_2(1+x)=0$$

$$\Leftrightarrow x.\left[2^{1-x}-\log_2(1+x)\right]=0\Leftrightarrow x=0 \text{ hoặc } 2^{1-x}-\log_2(1+x)=0$$

Xét hàm số: $f(x)=2^{1-x}-\log_2(1+x)$ với $x>-1$

Ta có: $f'(x)=-2^{1-x}\ln2-\frac{1}{(x+1)\ln2}<0$, $\forall x>-1$ suy ra $f(x)$ là hàm số nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$, hơn nữa $\lim\limits_{x\to-1^+}f(x)>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)<0$ từ đó suy ra đồ thị hàm số cắt trục hoành tại 1 điểm có hoành độ $x=1$. Do đó phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=1$.

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x=0$, $x=1$

Bài toán 5: Phương pháp đồ thị.

Giải phương trình: $\log_a x=f(x)$ $(0<a\ne1)$ $(*)$

$(*)$ là phương trình hoành độ giao điểm của 2 đồ thị $y=\log_a x$ $(0<a\ne1)$ và $y=f(x)$. Khi đó ta thực hiện 2 bước:

Bước 1: Vẽ đồ thị các hàm số: $y=\log_a x$ $(0<a\ne1)$ và $y=f(x)$.

Bước 2: Kết luận nghiệm của phương trình đã cho là số giao điểm của 2 đồ thị.

Ví dụ. Giải phương trình:

1. $\log_5 x+2x-11=0$ 2. $2^{\log_5(x+3)}=x$

Lời giải

1. Điều kiện $x>0$, phương trình đã cho được viết lại $\log_5 x=-2x+11$

Xét $f(x)=\log_5 x$ trên khoảng $(0;+\infty)$ và $g(x)=-2x+11$ trên $\mathbb{R}$

Dễ thấy, $f'(x)>0$, $\forall x>0$ suy ra hàm số $f(x)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $g'(x)<0$, $\forall x\in\mathbb{R}$ suy ra hàm số $g(x)$ nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Vẽ $f(x)$ và $g(x)$ lên cùng hệ trục, ta thấy $f(x)$ và $g(x)$ cắt nhau tại 1 giao điểm có hoành độ $x=5$, suy ra $x=5$ là nghiệm của phương trình.

Vậy, $x=5$ là nghiệm duy nhất của phương trình đã cho.

2. Điều kiện: $x>0$.

Lấy logarit cơ số 2 cả hai vế phương trình: $\log_5(x+3)=\log_2 x$

Đặt $t=\log_2 x\Rightarrow x=2^t$

Khi đó ta có: $\log_5\left(2^t+3\right)=t\Leftrightarrow 2^t+3=5^t\Leftrightarrow\left(\frac{2}{3}\right)^t+3.\left(\frac{1}{5}\right)^t=1$

Xét hàm số: $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^t+3.\left(\frac{1}{5}\right)^t$, ta có: $f'(t)<0$, $\forall t\in\mathbb{R}$ suy ra $f(t)$ là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$, hơn nữa $f(t)$ cắt đường thẳng $g(t)=1$ tại giao điểm có hoành độ $t=1$ tức $\log_2 x=1\Rightarrow x=2$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=2$.

Bài toán 6: Sử dụng tính đơn điệu của hàm số.

Ví dụ Giải phương trình:

1. $7^{x-1}=1+6\log_7(6x-5)$ 2. $\log_3(2x-1)=\log_3(x-1)^2+3x^2-8x+5$

Lời giải

1. Điều kiện: $x>\frac{5}{6}$.

Phương trình đã cho được viết lại: $7^{x-1}+6(x-1)=6x-5+6\log_7(6x-5)$.

Xét hàm số $g(t)=t+6\log_7 t$ có $g'(t)=1+\frac{6}{t\ln7}>0$, $\forall t>0$ suy ra $g(t)$ là hàm đồng biến, khi đó $g\left(7^{x-1}\right)=g(6x-5)\Leftrightarrow 7^{x-1}=6x-5$ hay $7^u=6u+1$ với $u=x-1$.

Tiếp tục xét hàm $g(u)=7^u-6u-1$ có $g'(u)=7^u\ln7-6\Rightarrow g'(u)=0$ khi và chỉ khi $u=\log_7 6-\log_7(\ln7)$

Bảng biến thiên:

Vì hàm số $g(u)$ đồng biến trên khoảng $(-\infty;u)$ và nghịch biến trên khoảng $(u;+\infty)$ nên hàm $g(u)=0$ có không quá hai nghiệm.

Mặt khác $g(0)=g(1)=0$, cho nên $u=0$ hoặc $u=1$ là 2 nghiệm của phương trình $g(u)=0$.

Khi $u=0$ tức $x-1=0$ hay $x=1$

Khi $u=1$ tức $x-1=1$ hay $x=2$

Vậy, phương trình đã cho có tập nghiệm $S=\{1;2\}$

Chú ý: Cần tìm $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ sao cho $1=\alpha(x-1)+\beta(6x-5)$ tương đương với

$1=(\alpha+6\beta)x-\alpha-5\beta$. Đồng nhất hai vế, ta được $\alpha=-6$ và $\beta=1$.

Vì thế $7^{x-1}-6\log_7(6x-5)=-6(x-1)+6x-5$ tức ta có phương trình

$$7^{x-1}+6(x-1)=6x-5+6\log_7(6x-5).$$

2. Phương trình đã cho tương đương

$$\log_3(2x-1)+(2x-1)=\log_3 3(x-1)^2+3(x-1)^2\ (*).$$

Xét hàm số: $f(t)=\log_3 t+t$, $t>0$ và $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln3}+1>0$ với $\forall t>0$ nên hàm $f(t)$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$

Phương trình $(*)$ có dạng $f(2x-1)=f\left[3(x-1)^2\right]\Leftrightarrow 2x-1=3(x-1)^2$, phương trình này có nghiệm $x=\dfrac{2}{3}$ hoặc $x=2$.

Vậy, phương trình cho có 2 nghiệm $x=\dfrac{2}{3}$ hoặc $x=2$.

Bài toán 7: Dùng hàm số logrit làm ẩn số.

Ví dụ. Giải phương trình: $\lg^2 x-\lg x.\log_2(4x)+2\log_2 x=0$

Lời giải

Biến đổi phương trình về dạng: $\lg^2 x-(2+\lg_2 x)\lg x+2\log_2 x=0\ (*)$

Với $t=\lg x$, phương trình $(*)$ trở thành: $t^2-(2+\log_2 x).t+2\log_2 x=0$

Phương trình này có biệt số $\Delta=(2-\log_2 x)^2$ nên có nghiệm $t=\log_2 x$ hoặc $t=2$

Với $t=\log_2 x$ tức $\lg x=\log_2 x=\dfrac{\lg x}{\lg 2}$ hay $\lg x=0\Leftrightarrow x=1$

Với $t=2$ tức $\lg x=2\Leftrightarrow x=100$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x=1$, $x=100$.

Bài toán 8: Giải bất phương trình.

Ví dụ. Giải các bất phương trình:

1. $\log_2\left(\sqrt{3x+1}+6\right)-1\ge\log_2\left(7-\sqrt{10-x}\right)$
2. $\log_{\frac{1}{3}}\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)>\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$

Lời giải

1. Điều kiện: $\begin{cases}3x+1\ge0\\10-x\ge0\\7-\sqrt{10-x}>0\end{cases}\Leftrightarrow-\dfrac{1}{3}\le x\le10.$

Bất phương trình tương đương với $\log_2\dfrac{\sqrt{3x+1}+6}{2}\ge\log_2\left(7-\sqrt{10-x}\right)$

$\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}+6\ge2\left(7-\sqrt{10-x}\right)\quad\Leftrightarrow\sqrt{3x+1}+2\sqrt{10-x}\ge8$

$\Leftrightarrow49x^2-418x+369\le0\ \Leftrightarrow1\le x\le\dfrac{369}{49}$ (thoả điều kiện).

2. Điều kiện $x>0$

Bất phương trình cho tương đương:

$$\log_3\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)+\log_3\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<0$$

$$\Leftrightarrow\log_3\left(\log_{\frac{1}{5}}\left(\sqrt{x^2+1}-x\right).\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\right)<0$$

$$\Leftrightarrow\log_5^2\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1\Leftrightarrow0<\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1$$

* $0<\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)\Leftrightarrow x>0$

* $\log_5\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)<1\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}+x<5\Leftrightarrow\sqrt{x^2+1}<5-x\Leftrightarrow x<\dfrac{12}{5}.$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm $x\in\left(0;\dfrac{12}{5}\right)$.

Dạng 10: Hệ phương trình – hệ bất phương trình mũ, logarit

Ví dụ 1. Giải các hệ phương trình:

1. $\begin{cases}3^{2x+2}+2^{2y+2}=17\\2.3^{x+1}+3.2^y=8\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}2^x+4^y=32\\xy=8\end{cases}$

3. $\begin{cases}4^{2x^2-2}-2^{2x^2+y}+4^y=1\\2^{2y+2}-3.2^{2x^2+y}=16\end{cases}$ **4.** $\begin{cases}2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x}\\\sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1}\end{cases}$

Lời giải

1. Đặt $\begin{cases}u=3^x\\v=2^y\end{cases}$, điều kiện $u>0,v>0$.

Hệ phương trình đã cho biến đổi về dạng: $\begin{cases} 9u^2+4v^2=17 \\ 6u+3v=8 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2+4\left(\dfrac{8-6u}{3}\right)^2=17 \\ v=\dfrac{8-6u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2-6u+1=0 \\ v=\dfrac{8-6u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=\dfrac{1}{3} \\ v=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x=\dfrac{1}{3} \\ 2^y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=1 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình cho có nghiệm $(-1;1)$

2. Cách 1: Dễ thấy, $x=4; y=2$ thỏa hệ phương trình.

Nếu $x<0$ thì $y<0$ và $2^x+4^x<1+1<32$. Do đó chỉ xét $x>0$.

Thay $y=\dfrac{8}{x}$ vào phương trình đầu ta được: $2^x+2^{\frac{16}{x}}=32$.

Xét hàm số $f(x)=2^x+2^{\frac{16}{x}}$ với $x>0$. Ta có: $f'(x)=2^x\ln 2-\dfrac{16}{x^2}2^{\frac{16}{x}}\ln 2$;

Với $\forall x>0$: $f'(x)=0 \Leftrightarrow x\cdot 2^x=\dfrac{16}{x}\cdot 2^{\frac{16}{x}}, x>0 \Leftrightarrow x=\dfrac{16}{x}, x>0 \Leftrightarrow x=4$

$f(4)=32$ vì $f'(4)>0$ nên $x=4$ là điểm cực tiểu của $f(x)$.

Vì vậy với mọi $x>0$ và $x\neq 4$ ta có cặp số duy nhất thỏa mãn bài toán là: $(x;y)=(4;2)$.

Để ý: Chứng minh $f(x)>32$ với $x>0$ một cách dễ dàng:

$f(x)\ge 2\sqrt{2^x\cdot 2^{\frac{16}{x}}}=2^{1+\frac{1}{2}\left(x+\frac{16}{x}\right)}$, hơn nữa $x+\dfrac{16}{x}\ge 8$, từ đây ta có đpcm

Cách 2: Ta có x,y là 2 số dương, vì nếu x,y âm thì $2^x+4^y<2<32$

Khi đó, $2^x+4^y\ge 2\sqrt{2^x.4^y}\ge 2\sqrt{2^{2\sqrt{xy}}}=32$

Đẳng thức xảy ra khi $x=2y$ suy ra $x=4, y=2$.

3. Hệ đã cho được viết lại: $\begin{cases} 4^{2(x^2-1)}-4.4^{x^2-1}.2^y+2^{2y}=1 \\ 2^{2y}-3.4^{x^2-1}.2^y=4 \end{cases}$ $(*)$

Đặt $u=4^{x^2-1}\left(u\ge\dfrac{1}{4}\right)$, $v=2^y\ (v>0)$

Khi đó hệ $(*)$ viết về dạng: $\begin{cases} u^2-4uv+v^2=1 & (1) \\ v^2-4uv=4 & (2) \end{cases}$

Cách 1: Từ phương trình (1) và (2) suy ra $4u^2-13uv+3v^2=0$

$\Leftrightarrow (u-3v)(4u-v)=0 \Leftrightarrow u=3v$ hoặc $v=4u$

Thay $u=3v$ vào phương trình (2), ta thấy phương trình vô nghiệm.

Thay $v=4u$ vào phương trình (2), ta được $u=1$

$$\Rightarrow \begin{cases} u=1 \\ v=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1}=1 \\ 2^y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=2 \end{cases}$$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $(-1;2),(1;2)$

Cách 2: Vì $v=0$ không là nghiệm của hệ, từ phương trình (2)

suy ra $u=\dfrac{v^2-4}{3v}$ (3)

Thay (3) vào (2), ta được $2v^4-31v^2-16=0 \Leftrightarrow (v^2-16)(2v^2+1)=0$

$\Rightarrow v^2=16 \Rightarrow v=4$

Ta có: $\begin{cases} u=1 \\ v=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{x^2-1}=1 \\ 2^y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-1=0 \\ y=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\pm 1 \\ y=2 \end{cases}$

Vậy, hệ phương trình có nghiệm $(-1;2),(1;2)$

4. $\begin{cases} 2^{3x+1}+2^{y-2}=3.2^{y+3x} & (1) \\ \sqrt{3x^2+1+xy}=\sqrt{x+1} & (2) \end{cases}$

Phương trình

$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ 3x^2+1+xy=x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x(3x+y-1)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=0 \vee y=1-3x \end{cases}$

Với $x=0$ thay vào phương trình (1), ta được:

$$2+2^{y-2}=3.2^y \Leftrightarrow 8+2^y=12.2^y \Leftrightarrow 2^y=\frac{8}{11} \Leftrightarrow y=\log_2\frac{8}{11}$$

Với $\begin{cases} x\ge -1 \\ y=1-3x \end{cases}$ thay vào phương trình (1), ta được:

$2^{3x+1}+2^{-3x-1}=3.2$ (3)

Đặt $t=2^{3x+1}$, vì $x\ge -1$ nên $t\ge -\dfrac{1}{4}$

Phương tình (3) trở thành: $t+\dfrac{1}{t}=6 \Leftrightarrow t^2-6t+1=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=3-2\sqrt{2} \\ t=3+2\sqrt{2} \end{array}\right.$

Đối chiếu điều kiện $t\ge -\dfrac{1}{4}$, ta chọn $t=3+2\sqrt{2}$.

Ta có : $2^{3x+1}=3+2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=\frac{1}{3}\left[\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)-1\right]$

$\Rightarrow y=1-3x=2-\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)$

Vậy, hệ cho có nghiệm : $\begin{cases}x=0\\ y=\log_2\frac{8}{11}\end{cases}$, $\begin{cases}x=\frac{1}{3}\left[\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)-1\right]\\ y=2-\log_2\left(3+2\sqrt{2}\right)\end{cases}$

Ví dụ 2. Giải các hệ phương trình:

1. $\begin{cases}2^x-2^y=y-x\\ \left(x^2-3y\right)\sqrt{2y^2-3x-2}\ge 0\end{cases}$ **2.** $\begin{cases}2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right)\\ 2^{(x+y)^2}+\frac{3}{2}\sqrt{x+y}=\frac{7}{2}\end{cases}$

3. $\begin{cases}2y\left(4y^2+3x^2\right)=x^4\left(x^2+3\right)\\ 2012^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4024\end{cases}$ **4.** $\begin{cases}2\left(x^3+2x-y-1\right)=x^2(y+1)\\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0\end{cases}$

5. $\begin{cases}x-y=e^x-e^y\ (1)\\ \log_2^2x+3\log_{\frac{1}{2}}y=2(2)\end{cases}$ **6.** $\begin{cases}e^{x^3+x}+\ln\frac{x}{y}-e^{y^3+y}=0(1)\\ \sqrt{x}+x^8-3y^4-\sqrt{y}=4(2)\end{cases}$

Lời giải

1. $\begin{cases}2^x-2^y=y-x\\ \left(x^2-3y\right)\sqrt{2y^2-3x-2}\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2^x+x=2^y+y\\ \left(x^2-3y\right)\sqrt{2y^2-3x-2}\ge 0\end{cases}$

Xét hàm $f(t)=2^t+t\Rightarrow f'(t)=2^t\ln 2+1>0,\forall t\in\mathbb{R}$

Vậy $f(t)$ là hàm đơn điệu tăng trên $\mathbb{R}$, mà $f(x)=f(y)$ nên $x=y$.

Với $x=y$, phương trình thứ 2 trở thành: $\left(x^2-3x\right)\sqrt{x^2-3x-2}\ge 0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\sqrt{x^2-3x-2}=0\\ \begin{cases}\sqrt{x^2-3x-2}>0\\ x^2-3x\ge 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\vee x=-\frac{1}{2}\\ \begin{cases}x<-\frac{1}{2}\vee x>2\\ x\le 0\vee x\ge 3\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\le-\frac{1}{2}\vee x=2\vee x\ge 3$$

2. $\begin{cases}2^{x^2+1}-4^{8y^2+\frac{1}{2}}=3\left(2\sqrt{y}-\sqrt{x}\right) & (1)\\ 2^{(x+y)^2}+\frac{3}{2}\sqrt{x+y}=\frac{7}{2} & (2)\end{cases}$

Điều kiện : $x\ge 0,y\ge 0$

Phương trình (1) viết lại : $2^{x^2+1}+3\sqrt{x}=2^{(4y)^2+1}+3\sqrt{4y}$ (3)

Xét hàm số : $f(t)=2^{t^2+1}+3\sqrt{t}\quad(t\ge 0)$, ta có : $f'(t)=2t.2^{t^2+1}\ln 2+\frac{2}{2\sqrt{t}}>0$ với $\forall t>0$, suy ra hàm số $f(t)$ đồng biến trên nửa khoảng $[0;+\infty)$, khi đó phương trình $(3)\Leftrightarrow x=4y$ (4)

Đặt $u=x+y$, phương trình (2) trở thành : $2^{u^2+1}+3\sqrt{u}=7$ (5)

Xét hàm số $f(u)=2^{u^2+1}+3\sqrt{u}$ đồng biến với mọi $u\ge 0$. Hàm số $f(u)$ cắt $g(u)=7$ tại giao điểm có hoành độ $u=1$, suy ra phương trình (5) có nghiệm duy nhất $u=1$ tức $x+y=1$ (6).

Từ (4) và (6) suy ra $x=\frac{4}{5},y=\frac{1}{5}$. Vậy, hệ cho có nghiệm $\left(\frac{4}{5};\frac{1}{5}\right)$.

3. $\begin{cases}2y\left(4y^2+3x^2\right)=x^4\left(x^2+3\right) & (1)\\ 2012^x\left(\sqrt{2y-2x+5}-x+1\right)=4024 & (2)\end{cases}$

Nếu $x=0$ thay vào (1) thấy không thỏa mãn.

Nếu $x\ne 0$, chia cả 2 vế của (1) cho x^3, ta được: $\left(\frac{2y}{x}\right)^3+3\left(\frac{2y}{x}\right)=x^3+3x$

Xét hàm số $f(t)=t^3+3t,\ \forall t\in\mathbb{R}$. Ta có $f'(t)=3t^2+3>0,\ \forall t\in\mathbb{R}$ do đó $f(t)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$, từ đây ta suy được $\frac{2y}{x}=x$ tức $2y=x^2$

Khi đó phương trình (2) viết lại : $2012^{x-1}\left(\sqrt{(x-1)^2+4}-(x-1)\right)=2$ (3).

Đặt $u=x-1$, khi đó (3) trở thành : $2012^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)=2$.

Lại xét $g(u)=2012^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)$ với $u\in\mathbb{R}$.

Ta có : $g'(u)=2012^u\left(\sqrt{u^2+4}-u\right)\left(\ln 2012-\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}\right)$

Vì $\sqrt{u^2+4}>u$ và $\frac{1}{\sqrt{u^2+4}}<1<\ln 2012$ nên $g'(u)>0$ với $u\in\mathbb{R}$. Suy ra hàm số $g(u)$ đồng biến trên $\mathbb{R}$ và $g(0)=2$ nên $u=0$ là nghiệm duy nhất của phương trình (3). Từ đó $x=1$ và $y=\frac{1}{2}$.

Vậy, hệ phương trình cho có nghiệm $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

4. Điều kiện: $y^2+2x>0$

Hệ phương trình cho viết lại : $\begin{cases}2\left(x^3+2x\right)-2(y+1)=x^2(y+1)\\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0\end{cases}$ hay

$\begin{cases}\left(x^2+2\right)(2x-y-1)=0\\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0\end{cases}$ tức là $\begin{cases}y=2x-1\\ y^3+4x+1+\ln\left(y^2+2x\right)=0\end{cases}$

Từ đó suy ra $(2x-1)^3+4x+1+\ln\left[(2x-1)^2+2x\right]=0$

Xét hàm số $f(x)=(2x-1)^3+4x+1+\ln\left[(2x-1)^2+2x\right]$ với $\forall x\in\mathbb{R}$

Dễ thấy $f(x)$ luôn đồng biến với $\forall x\in\mathbb{R}$ và $f(0)=0$, suy ra phương trình $f(x)=0$ có nghiệm duy nhất $x=0$.

Vậy hệ phương trình cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(0;1)$.

5. Điều kiện : $x>0,y>0$.

Phương trình $(1)\Leftrightarrow e^x-x=e^y-y$ có dạng $f(x)=f(y)$.

Xét hàm số : $f(t)=e^t-t$ với $t>0$.

Ta có : $f'(t)=e^t-1>0$ với $t>0$, suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Với $x=y$ thì phương trình (2) trở thành $\log_2^2x-3\log_2x-2=0(3)$.

Đặt $t=\log_2x$, phương trình (3) viết lại $t^2-3t-2=0$, giải phương trình này ta được $t=1$ hoặc $t=2$.

Với $t=1$ tức $\log_2x=1\Leftrightarrow x=2$.

Với $t=2$ tức $\log_2x=2\Leftrightarrow x=4$

Vậy hệ phương trình cho có nghiệm $(x;y)$ là $(2;2),(4;4)$.

6. Điều kiện : $x>0,y>0$.

Phương trình (1) tương đương với $e^{x^3+x}+\ln x=\ln y+e^{y^3+y}$ dạng $f(x)=f(y)$.

Xét hàm số : $f(t)=\ln t+e^{t^3+t}$ với $t>0$.

Ta có: $f'(t)>0$ với $\forall t>0$, suy ra hàm số $f(t)$ luôn đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và $f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Với $x=y$ thay vào phương trình (2) ta được $x^8+3x^4=4(3)$. Đặt $u=x^4$ với $u\ge0$, khi đó phương trình (3) trở thành $u^2+3u-4=0$, phương trình này có nghiệm $u=1$ thỏa điều kiện $u\ge0$.

Với $u=1$ tức $x^4=1$ hay $x^2=1$ suy ra $x=\pm1$.

Vậy hệ phương trình cho có nghiệm $(4;-2),(4;2)$ là $(1;1)$.

Bài tập tự luyện:

1. Tìm m để phương trình sau có 3 nghiệm phân biệt

$$x^3-(4m+3)x^2+4m(m+2)x-4\left(m^2-1\right)=0.$$

Hướng dẫn giải

1. Ta viết lại phương trình như sau: $4(x-1)m^2-4x(x-2)m+x^3-3x^2+4=0$

Đây là phương trình bậc 2 đối với ẩn m, phương trình có $\Delta'=4(x-2)^2$

Từ đó ta tìm được hai nghiệm: $\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{(x-2)(x+1)}{2(x-1)}\\ m=\dfrac{x-2}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-2m-2=0\\ x^2-(2m+1)x+2m-2=0\end{array}\right.$

Phương trình đã cho có ba nghiệm phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(2m+1)^2-4(2m-2)>0\\ (2m+2)^2-(2m+1)(2m+2)+2m-2\ne0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4m^2-4m+9>0\\ 4m\ne0\end{cases}\Leftrightarrow m\ne0$$

Vậy $m\ne0$ là những giá trị cần tìm.

2. Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có 4 nghiệm phân biệt :

$$2x^4-3x^3+(5m+2)x^2+2x+2m^2+2m=0$$

Hướng dẫn giải

Ta viết lại phương trình đã cho như sau:

$$2m^2+\left(2+5x^2\right)m+2x^4-3x^3+2x^2+2x=0\ (*)$$

Phương trình này có biệt thức: $\Delta=\left(2+5x^2\right)^2-8\left(2x^4-3x^3+2x^2+2x\right)$

$$=9x^4+24x^3+4x^2-16x+4=\left(3x^2+4x-2\right)^2.$$

Nên (*)

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}m=\dfrac{-2-5x^2+3x^2+4x-2}{4}=\dfrac{-x^2+2x-2}{2}\\ m=\dfrac{-2-5x^2-3x^2-4x+2}{4}=-2x^2-x\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{ll}2x^2+x+m=0 & (1)\\ x^2-2x+2+2m=0 & (2)\end{array}\right.$$

và (2) cùng có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases}\Delta_1 = 1-8m > 0\\ \Delta_2 = -2m-1 > 0\end{cases} \Leftrightarrow m < -\dfrac{1}{2}$

Giả sử x_0 là nghiệm chung của (1) và (2), thế thì: $\begin{cases} m = -2x_0^2 - x_0\\ m = \dfrac{-x_0^2+2x_0-2}{2}\end{cases}$

Suy ra $-2x_0^2 - x_0 = \dfrac{-x_0^2+2x_0-2}{2} \Leftrightarrow 3x_0^2 + 4x_0 - 2 = 0 \Leftrightarrow x_0 = \dfrac{-2\pm\sqrt{10}}{3}$

Thay vào ta tìm được: $m = \dfrac{-22\pm 5\sqrt{10}}{9}$.

Vậy $\begin{cases} m < -\dfrac{1}{2}\\ m \ne \dfrac{-22\pm5\sqrt{10}}{9}\end{cases}$ là những giá trị cần tìm.

3. Tìm m để hệ: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2} + |y| = m\\ \sqrt{y^2+2} + |x| = 2m - \sqrt{2}\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

Ta thấy nếu $(x;y)$ là nghiệm của hệ thì $(-x;-y)$ cũng là nghiệm, do đó hệ có nghiệm duy nhất $(x_0;y_0)$ thì $x_0 = y_0 = 0 \Rightarrow m = \sqrt{2}$

Với $m = \sqrt{2}$ ta có hệ: $\begin{cases}\sqrt{x^2+2} + |y| = \sqrt{2}\\ \sqrt{y^2+2} + |x| = \sqrt{2}\end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

Vậy $m = \sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

4. Tìm m để hệ: $\begin{cases} 2x + 2(m-1)y = m-4\\ 2|x+1| + my = 2\end{cases}$ có nghiệm duy nhất.

Hướng dẫn giải

Ta xét 2 trường hợp sau:

- $x \ge -1$ ta có: $\begin{cases}2x+2(m-1)y = m-4\\ 2x+my = 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m(4-m)}{2(m-2)}\\ y = \dfrac{m-4}{m-2}\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất thì

$$\frac{m(4-m)}{2m-4} \ge -1 \Leftrightarrow \frac{-m^2+6m-4}{m-2} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m \le 3-\sqrt{5}\\ 2 < m \le 3+\sqrt{5}\end{array}\right. \quad (1)$$

- $x < -1$ ta có: $\begin{cases}2x+2(m-1)y = m-4\\ -2x+my = 4\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{m^2-12m+8}{6m-4}\\ y = \dfrac{m}{3m-2}\end{cases}$

Hệ có nghiệm duy nhất thì

$$\frac{m^2-12m+8}{6m-4} < -1 \Leftrightarrow \frac{m^2-6m+4}{3m-2} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m < \dfrac{2}{3}\\ 3-\sqrt{5} < m < 3+\sqrt{5}\end{array}\right. \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta suy ra hệ có nghiệm duy nhất khi $\Leftrightarrow \dfrac{2}{3} \le m \le 2$.

5. Giải các phương trình:

a. $x^2 + 2(x-1)\sqrt{x^2+x+1} - x + 2 = 0$ **b.** $x + \sqrt{x} + \sqrt{x-1} + \sqrt{x^2-x} = 2$

c. $2x^2 - 11x + 21 = \sqrt[3]{4x-4}$ **d.** $x^2 + 9x + 20 = 2\sqrt{3x+10}$

e. $\left(\sqrt{4x+1} - \sqrt{3x-2}\right)5 = x+3$ **f.** $1 + \dfrac{2}{3}\sqrt{x-x^2} = \sqrt{x} + \sqrt{1-x}$

Hướng dẫn giải

a. Phương trình đã cho viết lại: $\left(x^2+x+1\right) + 2(x-1)\sqrt{x^2+x+1} - 2(x-1) - 1 = 0$

Đặt $t = \sqrt{x^2+x+1}$ và $t \ge 0$

Phương trình đã cho trở thành: $t^2 + 2(x-1)t - 2x + 1 = 0$, $t \ge 0$, dễ thấy phương trình có dạng đặc biệt, vì thế có 2 nghiệm $t = 1$ hoặc $t = 1-2x$.

Với $t = 1$ tức $\sqrt{x^2+x+1} = 1 \Leftrightarrow x = 0$ hoặc $x = -1$.

Với $t = 1-2x$ tức

$$\sqrt{x^2+x+1} = 1-2x \Leftrightarrow \begin{cases}1-2x \ge 0\\ x^2+x+1 = (1-2x)^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \le \dfrac{1}{2}\\ 3x^2 - 5x\end{cases} \Leftrightarrow x = 0$$

Vậy $x = -1$ hoặc $x = 0$ là nghiệm phương trình đã cho.

b. Điều kiện : $x \ge 1$.

Đặt $t = x + \sqrt{x-1}, x \ge 1 \Rightarrow t \ge 1$.

Khi đó: $t^2 = x + x - 1 + 2\sqrt{x(x-1)} \Rightarrow x + \sqrt{x^2-x} = \dfrac{t^2+1}{2}$

Phương trình đã cho được viết lại:

$$\begin{cases} t + \dfrac{t^2+1}{2} = 2\\ t \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t^2 + 2t - 3 = 0\\ t \ge 1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l} t = 1\\ t = -3\end{array}\right. \Leftrightarrow t = 1\\ t \ge 1\end{cases}$$

Với $t=1$ tức $\sqrt{x}+\sqrt{x+1}=1\Rightarrow x+x-1+2\sqrt{x^2-x}=1$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x^2-x}=1-x \Leftrightarrow \begin{cases}1-x\ge 0\\ x^2-x=1-2x+x^2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\le 1\\ x=1\end{cases} \Leftrightarrow x=1 \text{ thoả mãn}$$

Vậy $x=1$ là nghiệm phương trình đã cho.

c. Phương trình đã cho được viết lại: $(x-3)(2x-5)=3\left(\sqrt[3]{4x-4}-2\right)$

$$\Leftrightarrow (x-3)(2x-5)=\frac{3\left(\sqrt[3]{4x-4}-2\right)\left(\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4\right)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$$

tức $(x-3)(2x-5)=\dfrac{12(x-3)}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}$

hay $\left[\begin{array}{ll} x-3=0\Rightarrow x=3 & (1)\\ 2x-5-\dfrac{12}{\sqrt[3]{(4x-4)^2}+2\sqrt[3]{4x-4}+4}=0 & (2)\end{array}\right.$

Với $x>3$ suy ra $2x-5>1$; $t=\sqrt[3]{4x-4}>2\Rightarrow t^2+2t+4>12 \Rightarrow \dfrac{12}{t^2+2t+4}<1$

tức (2) vô nghiệm.

Với $x<3\Rightarrow 2x-5<1; 0<t^2+2t+4<12\Rightarrow \dfrac{12}{t^2+2t+4}>1$ suy ra (2) vô nghiệm.

d. Điều kiện $x\ge \dfrac{-10}{3}$.

Phương trình đã cho viết lại: $(x+3)(x+6)=2\left(\sqrt{3x+10}-1\right)$ tương đương với:

$$(x+3)(x+6)=\frac{2\left(\sqrt{3x+10}-1\right)\left(\sqrt{3x+10}+1\right)}{\left(\sqrt{3x+10}+1\right)}$$

hay $(x+3)(x+6)=\dfrac{6(x+3)}{\left(\sqrt{3x+10}+1\right)} \Leftrightarrow (x+3)\left(x+6-\dfrac{6}{\left(\sqrt{3x+10}+1\right)}\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x+3=0\Rightarrow x=-3 & (1)\\ x+6-\dfrac{6}{\left(\sqrt{3x+10}+1\right)}=0 & (2)\end{array}\right.$$

Nếu $x>-3$ suy ra $x+6>3$; $\sqrt{3x+10}+1>2\Rightarrow \dfrac{6}{\sqrt{3x+10}+1}<3\Rightarrow$ (2) vô nghiệm.

Nếu $\dfrac{-10}{3}\le x<-3$ suy ra $x+6<3$; $0<\sqrt{3x+10}+1<2\Rightarrow \dfrac{6}{\sqrt{3x+10}+1}>3\Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=-3$.

e. Cách 1:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\sqrt{4x+1}-3\right)-\left(\sqrt{3x-2}-2\right)=\dfrac{x-2}{5}$

$$\Leftrightarrow \frac{4(x-2)}{\sqrt{4x+1}+3}-\frac{3(x-2)}{\sqrt{3x-2}+2}=\frac{x-2}{5} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2\\ \dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}-1}{\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}=\dfrac{1}{5}(*)\end{array}\right.$$

Với $x\ge \dfrac{2}{3}\Rightarrow \dfrac{\sqrt{3x-2}-\sqrt{4x+1}-1}{\left(\sqrt{4x+1}+3\right)\left(\sqrt{3x-2}+2\right)}<0$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=2$.

Cách 2:

Vì $\left(\sqrt{4x+1}\right)^2-\left(\sqrt{3x-2}\right)^2=x+3$ nên phương trình đã cho tương đương với

$$5\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=(4x+1)-(3x-2)$$

hay $5\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)=\left(\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}\right)\left(\sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}\right)$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{4x+1}-\sqrt{3x-2}=0\\ \sqrt{4x+1}+\sqrt{3x-2}=5\end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$$

f. $0\le x\le 1$.

Cách 1: Bình phương 2 vế rồi rút gọn, ta được: $4\left(x-x^2\right)-6\sqrt{x-x^2}=0$

Cách 2: Đặt $t=\sqrt{x}+\sqrt{1-x}$, ta tìm được $t=2$ (không thỏa), $t=1$ thỏa.

Cách 3: $2\sqrt{x}\sqrt{1-x}-3\sqrt{1-x}=3\sqrt{x}-3\Rightarrow \sqrt{1-x}=\dfrac{3\sqrt{x}-3}{2\sqrt{x}-3},\ x\ne \dfrac{9}{4}$

Đặt $t=\sqrt{x}\Rightarrow \sqrt{1-x}=\dfrac{3t-3}{2t-3}$

Hơn nữa $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=1\Rightarrow t^2+\left(\dfrac{3t-3}{2t-3}\right)^2=1$, quy đồng rồi rút gọn, đặt nhân tử chung, ta được $t(t-1)\left(2t^2-4t+3\right)=0$

Cách 4: $a=\sqrt{x}$, $b=\sqrt{1-x}$ với $a\ge 0, b\ge 0$.

Ta có hệ: $\begin{cases} 1+\dfrac{2}{3}ab=a+b \\ a^2+b^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3+2ab=3(a+b) \\ (a+b)^2-2ab=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=1 \\ ab=0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a+b=2 \\ ab=\dfrac{3}{2} \end{cases}$

Cách 5: $\left(\sqrt{x}\right)^2+\left(\sqrt{1-x}\right)^2=1$ gợi ta nghĩ đến $\sin^2 a+\cos^2 a=1$

Đặt $\sqrt{x}=\sin a,\ \ 0\le a\le\dfrac{\pi}{2}$

6. Giải bất phương trình: $\sqrt{x-1}+x-3\ge\sqrt{(x-3)^2+2x-2}$

Hướng dẫn giải

Đặt : $\begin{cases} u=\sqrt{x-1}, u\ge 0 \\ v=x-3 \end{cases}$.

Khi đó bất phương trình cho tương đương với :

$$\begin{cases} u+v\ge\sqrt{v^2+2u^2} \\ u\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (u+v)^2\ge v^2+2u^2 \\ u\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2uv\ge u^2 \\ u\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u\le 2v \end{array}\right.$$

Với $u=0$ tức $\sqrt{x-1}=0$ vì thế $x=1$

Với $u\le 2v$ tức $\sqrt{x-1}\le 2(x-3)$, bất phương trình này tương đương:

$$\begin{cases} x-1\ge 0 \\ x-3\ge 0 \\ x-1\le 4(x-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge 3 \\ 4x^2-25x+37\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 1 \\ x\ge 3 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 3$$

Vậy tập nghiệm bất phương trình : $T=[3;+\infty)$.

7. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} (x-1)\left(y^2+6\right)=y\left(x^2+1\right) \\ (y-1)\left(x^2+6\right)=x\left(y^2+1\right) \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \sqrt{2}(x-y)(1+4xy)=\sqrt{3} & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$

c. $\begin{cases} x^4-x^3y+x^2y^2=1 \\ x^3y-x^2+xy=-1 \end{cases}$ **d.** $\begin{cases} \sqrt{x+\sqrt{y}}-\sqrt{x-\sqrt{y}}=\sqrt{4x-y} \\ \sqrt{x^2-16}=2+\sqrt{y-3x} \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a. $\begin{cases} (x-1)\left(y^2+6\right)=y\left(x^2+1\right) \\ (y-1)\left(x^2+6\right)=x\left(y^2+1\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy^2+6x-y^2-6=yx^2+y \\ yx^2+6y-x^2-6=xy^2+x \end{cases}$

Trừ về theo vế, ta được: $2xy(y-x)+7(x-y)+(x-y)(x+y)=0$

$$\Leftrightarrow (x-y)(x+y-2xy+7)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y \\ x+y-2xy+7=0 \end{array}\right.$$

Với $x=y$ thay vào hệ ta được: $x^2-5x+6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=y=2 \\ x=y=3 \end{array}\right.$.

Với $x+y-2xy+7=0 \Leftrightarrow (1-2x)(1-2y)=15\ \ (1)$

Mặt khác cộng vế theo vế hai phương trình đã cho, ta được:

$$x^2+y^2-5x-5y+12=0 \Leftrightarrow (2x-5)^2+(2y-5)^2=2\ \ (2)$$

Đặt: $a=2x-5, b=2y-5$.

Từ (1) và (2) ta có hệ: $\begin{cases} a^2+b^2=2 \\ (a+4)(b+4)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a+b)^2-2ab=2 \\ ab+4(a+b)=-1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a+b=0 \\ ab=-1 \end{cases} \Rightarrow (x;y)=(3;2),\ (2;3) \\ \begin{cases} a+b=-8 \\ ab=31 \end{cases} \Rightarrow VN_0 \end{array}\right.$$

Vậy hệ phương trình cho có nghiệm là: $(2;2),\ (2;3),\ (3;2),\ (3;3)$

b. Vì $x^2+y^2=1 \Rightarrow x,y\in[-1;1]$. Đặt $x=\sin\alpha, y=\cos\alpha$ với $\alpha\in[0;2\pi]$.

Khi đó phương trình (1) trở thành $\sqrt{2}(\sin\alpha-\cos\alpha)(1+2\sin 2\alpha)=\sqrt{3}$ tức

$$\sqrt{2}.\sqrt{2}\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right).2.\left(\sin 2\alpha+\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}$$

hay $4\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\left(\sin 2\alpha+\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3} \Leftrightarrow 8\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)\sin\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{12}\right)=\sqrt{3}$

$$\Leftrightarrow 4\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{12}\right)\left[\cos\frac{\pi}{3}-\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)\right]=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-4\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\cos\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)=\sqrt{3}$$

$$\Leftrightarrow 2\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)-2\left[\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{12}\right)\right]=\sqrt{3} \Leftrightarrow -2\cos\left(3\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{3}$$

hay $\cos\left(3\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha=-35^0+k120^0 \\ \alpha=65^0+k120^0 \end{array}\right.\quad (k\in\mathbb{Z})$

Vậy hệ đã cho có 6 nghiệm:

$\left(\sin 65^0;\cos 65^0\right), \left(-\sin 35^0;\cos 35^0\right),\ \left(\sin 85^0;\cos 85^0\right),$

$\left(-\sin5^0;-\cos5^0\right),\left(-\sin25^0;-\cos25^0\right),\left(\sin305^0;\cos305^0\right)$.

c. Cách 1: $\begin{cases}\left(x^2-xy\right)^2=1-x^3y\\ x^3y-\left(x^2-xy\right)=-1\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}x^2-xy=u\\ x^3y=v\end{cases}$, ta được hệ: $\begin{cases}u^2=1-v\\ v-u=-1\end{cases}\Rightarrow(x;y)=(-1;0),(1;0)$

Cách 2: Trừ vế theo vế ta được: $\left(x^2-xy\right)^2+\left(x^2-xy\right)-2=0$

d. Điều kiện: $x\ge4,y\ge0,x^2\ge y,4x\ge y,y\ge3x$

Phương trình $(1)\Leftrightarrow 2x-2\sqrt{x^2-y}=4x-y\Leftrightarrow 2\sqrt{x^2-y}=y-2x\Leftrightarrow y=0$

hoặc $y=4x-4$

$y=0$ không thỏa vì $x\ge4,y\ge3x$

$y=4x-4$ thế thì phương trình

$$(2)\Leftrightarrow\sqrt{x^2-16}-3=\sqrt{x-4}-1\Leftrightarrow(x-5)\left(\frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}-\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow x=5\Rightarrow y=16 \text{ vì } \frac{x+5}{\sqrt{x^2-16}+3}>\frac{x+5}{\sqrt{x^2}+3}>1\ge\frac{1}{\sqrt{x-4}+1}$$

8. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases}2(2x+1)^3+2x+1=(2y-3)\sqrt{y-2}\\ \sqrt{4x+2}+\sqrt{2y+4}=6\end{cases}$ **b.** $\begin{cases}(3-x)\sqrt{2-x}-2y\sqrt{2y-1}=0\\ 2\sqrt{2-x}-\sqrt{(2y-1)^3}=1\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a. Hàm số $f(t)=2t^3+t$ đồng biến khi $t>0$, suy ra $f(2x+1)=f\left(\sqrt{y-2}\right)$ tương đương $2x+1=\sqrt{y-2}$ thay vào phương trình thứ 2, sau đó xét hàm số $h(y)=\sqrt[4]{4y-8}+\sqrt{2y+4}$, $y>2$. Dễ thấy $h(y)$ đồng biến với $y>2$ và $h(6)=0$.

Kết luận, hệ cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=\left(\frac{1}{2};6\right)$.

b. Đặt $\begin{cases}u=\sqrt{2-x},\ u\ge0\\ v=\sqrt{2y-1},\ v\ge0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=2-u^2\\ y=\frac{v^2+1}{2}\end{cases}$, khi đó hệ cho trở thành $\begin{cases}u+u^3=v+v^3\\ 2u-v^3=1\end{cases}$.

Xét $f(t)=t^3+t$ đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Kết luận, hệ cho có nghiệm $(x;y)=\left\{\left(\frac{1}{2};6\right),\left(\frac{1+\sqrt5}{2};\frac{5-\sqrt5}{4}\right)\right\}$.

9. Giải các phương trình:

a. $2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0$ **b.** $\frac{8}{2^{x-1}+1}+\frac{2^x}{2^x+2}=\frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Hướng dẫn giải

a. Chia cả 2 vế phương trình cho $2^{2x+2}\ne0$ ta được:

$$2^{2x^2-2x-1}-9.2^{x^2-2x-2}+1=0\Leftrightarrow\frac{1}{2}.2^{2x^2-2x}-\frac{9}{4}.2^{x^2-x}+1=0$$

$$\Leftrightarrow 2.2^{2x^2-2x}-9.2^{x^2-x}+4=0.$$

Đặt $t=2^{x^2-x}$, $t>0$. Khi đó phương trình đã cho được viết lại:

$$2t^2-9t+4=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=4\\ t=\frac{1}{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}2^{x^2-x}=2^2\\ 2^{x^2-x}=2^{-1}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2-x=2\\ x^2-x=-1\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm $x=-1,x=2$.

Chú ý: Để ý bài toán đã cho không có tham số nên ta sử dụng điều kiện cho ẩn phụ chỉ là $t>0$ và nếu $t=\frac{1}{2}$ vô nghiệm. Nếu bài toán có chứa tham số thì điều kiện đúng của t: $x^2-x=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\ge-\frac{1}{4}\Leftrightarrow 2^{x^2-x}\ge2^{\frac{1}{4}}\Leftrightarrow t\ge\frac{1}{\sqrt[4]{2}}$.

b. Phương trình cho viết lại: $\frac{8}{2^{x-1}+1}+\frac{1}{2^{1-x}+1}=\frac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$ $(*)$

Đặt: $u=2^{x-1}+1,\ v=2^{1-x}+1\ (u,v>1)$

Phương trình $(*)$ trở thành: $\begin{cases}\frac{8}{u}+\frac{1}{v}=\frac{18}{u+v}\\ u+v=uv\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}u+8v=18\\ u+v=uv\end{cases}\Leftrightarrow u=v=2$

hoặc $u=9;v=\frac{9}{8}$

Với $u=v=2$, ta được $\begin{cases}2^{x-1}+1=2\\ 2^{1-x}+1=2\end{cases}\Leftrightarrow x=1$

Với $u=9;v=\frac{9}{8}$, ta được $\begin{cases}2^{x-1}+1=9\\ 2^{1-x}+1=\frac{9}{8}\end{cases}\Leftrightarrow x=4$

Vậy, phương trình đã cho có nghiệm $x=1,\ x=4$

10. Giải các phương trình:

a. $\log_2\frac{x-5}{x+5}+\log_2\left(x^2-25\right)=0$ **b.** $1+\log_6\frac{x-1}{x+7}=\frac{1}{2}\log_6(x-1)^2$

c. $2\log_3(x-2)+\log_3(x-4)^2=0$

Hướng dẫn giải

a. Điều kiện: $\begin{cases}\frac{x-5}{x+5}>0\\ x^2-25>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-5\\ x>5\end{array}\right.$ $(*)$.

$$(1)\Leftrightarrow \log_2\frac{(x-5)\left(x^2-25\right)}{x+5}=0\Leftrightarrow \log_2(x-5)^2=0\Leftrightarrow |x-5|=1$$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=6\\ x=4\end{array}\right.$ $(**)$.Từ $(*),(**)$ suy ra phương trình có nghiệm $x=6$.

Lời bình :

$$(1)\Leftrightarrow \log_2(x-5)-\log_2(x+5)+\log_2(x-5)(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-5)-\log_2(x+5)+\log_2(x-5)+\log_2(x+5)=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-5)=0\Leftrightarrow x=6.$$

Thoạt nhìn thấy bài giải rất hợp lý và cho ra đáp số đúng ; cách giải này khá nguy hiểm vì nó thu hẹp miền xác định . Kết quả đúng chỉ là một sự may mắn ngẫu nhiên .

b. Điều kiện: $\begin{cases}\frac{x-1}{x+7}>0\\ (x-1)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-7\end{array}\right.\\ x\neq 1\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>1\\ x<-7\end{array}\right.$ $(*)$

$$(2)\Leftrightarrow 1+\log_6\frac{x-1}{x+7}=\log_6|x-1|\Leftrightarrow \log_6\frac{x-1}{x+7}-\log_6|x-1|=-1$$

$$\Leftrightarrow \log_6\frac{x-1}{(x+7)|x-1|}=-1\Leftrightarrow \frac{x-1}{(x+7)|x-1|}=\frac{1}{6}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>1\\ \frac{1}{(x+7)}=\frac{1}{6}\end{cases} \text{hoặc } \begin{cases}x<-1\\ \frac{1}{(x+7)}=-\frac{1}{6}\end{cases} \Leftrightarrow x=-13 \quad (**)$$

Kết hợp $(*)$ và $(**)$ thì $x=-13$ là nghiệm phương trình .

Lời bình: Việc áp dụng công thức $\log_a\frac{b}{c}=\log_a b-\log_a c$ làm miền xác định được mở rộng ra, nhưng trong trường hợp trên không làm thay đổi miền xác định .Tuy nhiên nếu áp dụng $\log_6(x-1)^2=2\log_6(x-1)$ sẽ làm co hẹp miền xác định của phương trình.

c. Điều kiện: $\begin{cases}x-2>0\\ (x-4)^2>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>2\\ x\neq 4\end{cases}$

$$(*)\Leftrightarrow 2\log_3(x-2)+2\log_3|x-4|=0\Leftrightarrow \log_3(x-2)|x-4|=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}(x-2)|x-4|=1\\ x-2>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}(x-2)(x-4)=1\\ x>4\end{cases}\\ \begin{cases}(x-2)(-x+4)=1\\ 2<x<4\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x^2-6x+7=0\\ x>4\end{cases}\\ \begin{cases}x^2-6x+9=0\\ 2<x<4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=3\pm\sqrt{2}\\ x>4\end{cases}\\ \begin{cases}x=3\\ 2<x<4\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=3+\sqrt{2}\\ x=3\end{array}\right.$$

Lời bình: Cũng như bài trên, nguyên nhân sai lầm của bài này nếu áp dụng $\log_3(x-4)^2=2\log_3(x-4)$, sự co hẹp miền xác định của phương trình đã làm mất đi nghiệm $x=3$

11. Giải các bất phương trình:

a. $\frac{1}{2}\log_2 x\log_{\frac{3}{4}} x+3>\frac{3}{2}\log_2 x+\log_{\frac{3}{4}} x$

b. $\log_2\left(4x^2-4x+1\right)-2x>2-(x+2)\log_{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}-x\right)$

c. $\log_2\frac{5-12x}{12x-8}+\log_{\frac{1}{2}} x\le 0$

Hướng dẫn giải

a Bất phương trình cho tương đương: $\log_2 x\log_{\frac{3}{4}} x+6-3\log_2 x+2\log_{\frac{3}{4}} x>0$

$$\Leftrightarrow (\log_2 x-2)\left(\log_{\frac{3}{4}} x-3\right)>0\Leftrightarrow \begin{cases}\log_2 x-2>0\\ \log_{\frac{3}{4}} x-3>0\end{cases} \text{hoặc } \begin{cases}\log_2 x-2<0\\ \log_{\frac{3}{4}} x-3<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x>4\\ x<\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}\end{cases} \text{hoặc } \begin{cases}x<4\\ x>\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{27}{64}\end{cases} \Leftrightarrow \frac{27}{64}<x<4$$

Vậy, bất phương trình cho có nghiệm: $x \in \left(\frac{27}{64}; 4\right)$

b. Điều kiện: $\begin{cases} \frac{1}{2} - x > 0 \\ 4x^2 - 4x + 1 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ (2x-1)^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x < \frac{1}{2} \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x < \frac{1}{2} \quad (*)$

Bất phương trình cho viết lại: $2\log_2(1-2x) - 2x > 2 + (x+2)\left[\log_2(1-2x) - 1\right]$

$$\Leftrightarrow x\left[\log_2(1-2x) + 1\right] < 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \log_2(1-2x) + 1 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \log_2(1-2x) + 1 > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ \log_2 2(1-2x) < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ \log_2 2(1-2x) > 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 0 \\ 2(1-2x) < 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x < 0 \\ 2(1-2x) > 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \frac{1}{4} \\ x < 0 \end{array}\right.$$

Đối chiếu điều kiện $(*)$, ta được $x < 0$ hoặc $\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.

c. Bất phương trình đã cho tương đương với: $\begin{cases} \frac{5-12x}{12x-8} \le x \\ \frac{5-12x}{12x-8} > 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{-12x^2 - 4x + 5}{12x-8} \le 0 \\ \frac{5-12x}{12x-8} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -\frac{5}{6} \le x \le \frac{1}{2} \\ x > \frac{2}{3} \end{array}\right. \\ \frac{5}{12} < x < \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{5}{12} < x \le \frac{1}{2}.$$

12. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases} \log_8 xy = 3\log_8 x \log_8 y \\ \log_2 \frac{x}{y} = \frac{3}{4}\log_y x \end{cases}$ **b.** $\begin{cases} \left(\sqrt{x+1}\right)3^y = \frac{3\sqrt{4-x}}{x} & (1) \\ y + \log_3 x = 1 & (2) \end{cases}$

c. $\begin{cases} 2\log_{1-x}(-xy - 2x + y + 2) + \log_{2+y}\left(x^2 - 2x + 1\right) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$

d. $\begin{cases} 6x^2 + y^2 - 5xy - 7x + 3y + 2 = 0 & (1) \\ \frac{x-y}{3} = \ln\frac{x+2}{y+2} & (2) \end{cases}$ **e.** $\begin{cases} 2x^3 - y^3 = \left(2y^2 - x^2\right)(2y - x) (1) \\ \log_2 x + \log_{xy} 16 = 4 - \frac{1}{\log_y 2} (2) \end{cases}$

Hướng dẫn giải

a. Điều kiện: $x > 0, y > 0, y \neq 1$

$$\begin{cases} \log_8 xy = 3\log_8 x \log_8 y \\ \log_2 \frac{x}{y} = \frac{3}{4}\log_y x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 x + \log_2 y = \log_2 x \log_2 y \\ \log_2 x - \log_2 y = \frac{3\log_2 x}{4\log_2 y} \end{cases}$$

Đặt: $u = \log_2 x$; $v = \log_2 y$ hệ phương trình trở thành:

$$\begin{cases} u + v = uv \\ u - v = \frac{3u}{4v} \end{cases} (v \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} u(v-1) = v \\ 2u = u\left(v + \frac{3}{4v}\right) \end{cases} (v \neq 0) \quad (*)$$

Nếu $u = 0$ thì $v = 0$ trái với điều kiện, do đó $u \neq 0$

Khi đó hệ $(*)$ đưa về hệ : $\begin{cases} u = \frac{v}{v-1} \\ 2 = v + \frac{3}{4v} \end{cases} (u, v \neq 0) \Leftrightarrow \begin{cases} u = \frac{v}{v-1} \\ 4v^2 - 8v + 3 = 0 \end{cases}$ hệ này có 2 nghiệm : $(u;v) = \left(-1; \frac{1}{2}\right)$ hoặc $(u;v) = \left(3; \frac{3}{2}\right)$.

Vậy, nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = \left(\frac{1}{2}; \sqrt{2}\right)$, $(x;y) = \left(8; 2\sqrt{2}\right)$

b. Điều kiện: $0 < x \le 4$

Phương trình (2) suy ra $y = 1 - \log_3 x \Leftrightarrow 3^y = 3^{1-\log_3 x} = \frac{3}{3^{\log_3 x}} = \frac{3}{x}$ (3)

Thế (3) vào (1), ta được $\left(\sqrt{x+1} - 1\right)\frac{3}{x} = \frac{3\sqrt{4-x}}{x}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1} - 1 = \sqrt{4-x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1} = \sqrt{4-x} + 1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{4-x} = x - 2 \Leftrightarrow \begin{cases} x - 2 \ge 0 \\ 4 - x = (x-2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 2 \\ x^2 - 3x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 0$$

Vậy, hệ phương trình cho có nghiệm $(3;0)$

c. Điều kiện: $\begin{cases} -xy - 2x + y + 2 > 0, x^2 - 2x + 1 > 0, y + 5 > 0, x + 4 > 0 \\ 0 < 1 - x \neq 1, 0 < 2 + y \neq 1 \end{cases} (*)$.

Hệ đã cho được viết lại: $\begin{cases} 2\log_{1-x}[(1-x)(y+2)] + 2\log_{2+y}(1-x) = 6 \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_{1-x}(y+2) + \log_{2+y}(1-x) - 2 = 0 \, (1) \\ \log_{1-x}(y+5) - \log_{2+y}(x+4) = 1 \, (2) \end{cases}$$

Đặt: $t=\log_{2+y}(1-x)$, khi đó phương trình (1) trở thành:

$$t+\frac{1}{t}-2=0\Leftrightarrow(t-1)^2=0\Leftrightarrow t=1$$

Với $t=1$ tức $\log_{2+y}(1-x)=1$ nghĩa là $1-x=2+y$ hay $y=-x-1$

Thay $y=-x-1$ vào phương trình (2), ta được:

$$\log_{1-x}(-x+4)-\log_{1-x}(x+4)=1\Leftrightarrow\log_{1-x}\frac{-x+4}{x+4}=1$$

$$\Leftrightarrow\frac{-x+4}{x+4}=1-x\Leftrightarrow x^2+2x=0\Leftrightarrow x=0\Rightarrow y=-1 \text{ hoặc } x=-2\Rightarrow y=1.$$

Kiểm tra lại với điều kiện $(*)$, ta thấy $(x;y)=(-2;1)$ thỏa mãn.

Vậy, hệ cho có nghiệm duy nhất $(x;y)=(-2;1)$.

d. Điều kiện: $x>-2, y>-2$.

Phương trình (1) được viết lại $(y-3x+2)(y-2x+1)=0\Leftrightarrow y=3x-2$ hoặc $y=2x-1$

Phương trình (2) được viết lại: $x-3\ln(x+2)=y-3\ln(y+2)$

Xét hàm số $f(t)=t-3\ln(t+2)$ với $t>-2$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{t-1}{t+2}$, trên khoảng $(-2;+\infty)$: $f'(t)=0\Leftrightarrow t=1$

Lập bảng biến thiên, nhận thấy hàm $f(t)$ nghịch biến trên khoảng $(-2;1)$ và đồng biến trên khoảng $(1;+\infty)$

Với $x=1\Rightarrow y=1$ thỏa mãn hệ phương trình.

Với $x,y\in(-2;+\infty)$ và khác 1 $\Rightarrow f(y)>f(x)$

Thật vậy, vì $y=3x-2$ hoặc $y=2x-1$ suy ra $y-x=2(x-1)$ hoặc $y-x=x-1$.

Nhận thấy:

Với $x<1\Rightarrow y<x\Rightarrow f(y)>f(x)$, do hàm số nghịch biến trên $(-2;1)$

Với $x>1\Rightarrow y>x\Rightarrow f(y)>f(x)$, do hàm số đồng biến trên $(1;+\infty)$

Vậy, hệ phương trình cho có nghiệm $(1;1)$

e. Điều kiện: $\begin{cases}x>0;0<y\neq 1\\0<xy\neq 1\end{cases}$

Phương trình (2) tương đương với $\log_2 x+\dfrac{1}{\log_{2^4} xy}=4-\log_2 y$, tức

$$\log_2 x+\log_2 y=4-\frac{1}{\log_{2^4} xy}=4-\frac{4}{\log_2 xy}$$

nghĩa là $\log_2 xy=4-\dfrac{4}{\log_2 xy}$,

quy đồng và rút gọn, ta được : $(\log_2 xy-2)^2=0$ suy ra $\log_2 xy=2\Leftrightarrow xy=4$

Phương trình (1) tương đương với $x^3+2x^2y+2xy^2-5y^3=0$ (3)

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}x^3+2x^2y+2xy^2-5y^3=0\\xy=4\end{cases}\quad(*)$

- $*$ Khi $y=0$, hệ phương trình $(*)$ vô nghiệm.
- $*$ Khi $y\neq 0$, chia 2 vế phương trình (3) cho $y^3\neq 0$,

ta được: $\left(\dfrac{x}{y}\right)^3+2\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+2\left(\dfrac{x}{y}\right)-5=0$ (4)

Đặt $t=\dfrac{x}{y}$, phương trình (4) trở thành: $t^3+2t^2+2t-5=0$, phương trình này có nghiệm $t=1 \vee t^2-3t+5=0$ vô nghiệm

Khi $t=1\Leftrightarrow\dfrac{x}{y}=1$ kết hợp với $xy=4$

Suy ra hệ có 2 nghiệm $(-2;-2)$, $(2;2)$

Do $x>0$, $y>0$ vậy hệ có nghiệm $(2;2)$

Vậy hệ đã cho có ba nghiệm:

$$(x;y)=\left\{(0;0),\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right);\left(\frac{3\sqrt{3}}{4};\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right\}.$$

13. Giải các hệ phương trình:

a. $\begin{cases}x^3+x+\log_2\left(\dfrac{x}{y}\right)=8y^3+2y+1 & (1)\\ y^2-xy+\dfrac{1}{4}=0\quad(x>0,y>0) & (2)\end{cases}$

b. $\begin{cases}9^{\log_2(xy)}-3=2(xy)^{\log_2 3} & (1)\\(x+1)^2+(y+1)^2=1 & (2)\end{cases}$

Hướng dẫn giải

a. Phương trình $(1)\Leftrightarrow x^3+x+\log_2 x=8y^3+2y+\log_2(2y.)$ (3)

Xét hàm số: $f(t)=t^3+t+\log_2 t$ với $t>0$

Ta có: $f'(t)=3t^2+1+\frac{1}{t\ln 2}>0$ với $\forall t>0$, do đó $f(t)$ luôn đồng biến trong khoảng $(0;+\infty)$, phương trình $(3)\Leftrightarrow f(x)=f(2y)$ tức $x=2y$

Với $x=2y$, phương trình (2) trở thành : $y^2=\frac{1}{4}\Leftrightarrow y=\frac{1}{2}$ thỏa $y>0$.

Vậy, hệ cho có nghiệm: $(x;y)=\left(1;\frac{1}{2}\right)$

b. Điều kiện: $xy>0$.

Đặt $t=\log_2(xy)\Rightarrow xy=2^t$, khi đó phương trình (1) trở thành:

$$9^t-3=2\left(2^t\right)^{\log_2 3}\Leftrightarrow 3^{2t}-3=2.3^t\Leftrightarrow 3^{2t}-2.3^t-3=0$$

$\Leftrightarrow\left(3^t+1\right)\left(3^t-3\right)=0$, suy ra $3^t=3$ tức $xy=2$ (3).

Phương trình $(2)\Leftrightarrow x^2+y^2+2x+2y+1=0$

$\Leftrightarrow(x+y)^2+2(x+y)-2xy+1=0\Leftrightarrow(x+y)^2+2(x+y)-3=0$ do (3),

phương trình này tương đương $(x+y-1)(x+y+3)=0$

$\Leftrightarrow x+y=-3$ hoặc $x+y=1$

TH 1: $\begin{cases}x+y=-3\\xy=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=2\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$

TH 2: $\begin{cases}x+y=1\\xy=2\end{cases}$ trường hợp này vô nghiệm.

Vậy, hệ đã cho có nghiệm $(1;2),(2;1)$.

Chuyên đề IV

NGUYÊN HÀM, TÍCH PHÂN VÀ ỨNG DỤNG

Để học giỏi môn tích phân lớp 12, các em cần:

1. ***Thuộc bảng đạo hàm (nguyên hàm là ngược với đạo hàm);***
2. ***Hiểu rõ và nắm kĩ các định lý tích phân;***
3. ***Làm nhiều bài tập và nắm vững các dạng toán.***

1. Định nghĩa: Cho hàm số f xác định trên K. Hàm số F được gọi là nguyên hàm của f trên K nếu $F'(x)=f(x)\ \forall x\in K$.

2. Các tính chất:

Định lí 1. Nếu F là một nguyên hàm của hàm f trên K thì mọi nguyên hàm của f trên K đều có dạng $F(x)+C,\ C\in\mathbb{R}$. Do vậy $F(x)+C$ gọi là họ nguyên hàm của hàm f trên K và được kí hiệu: $\int f(x)dx=F(x)+C$.

Định lí 2. Mọi hàm số liên tục trên K đều có nguyên hàm trên K

Định lí 3. Nếu f, g là hai hàm liên tục trên K thì:

+ $\int\left[f(x)\pm g(x)\right]dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$.

+ $\int k.f(x)dx=k\int f(x)dx$ với mọi số thực $k\neq 0$.

Định lí 4. Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì

$$\int f(u(x)).u'(x)dx=\int f(u(x)).d(u(x))=F(u(x))+C.$$

3. Bảng nguyên hàm các hàm số thường gặp

Các hàm sơ cấp thường gặp	Nguyên hàm mở rộng
+ $\int x^\alpha dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq-1)$	+ $\int\frac{dx}{ax+b}=\frac{1}{a}\ln\lvert ax+b\rvert+C$
+ $\int\frac{dx}{x}=\ln\lvert x\rvert+C$	+ $\int\sin(ax+b)dx=-\frac{1}{a}.\cos(ax+b)+C$
+ $\int e^x dx=e^x+C$	+ $\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}.\sin(ax+b)+C$
+ $\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$	+ $\int\frac{dx}{\cos^2(ax+b)}=\frac{1}{a}\tan(ax+b)+C$
+ $\int\sin x dx=-\cos x+C$	+ $\int\frac{dx}{\sin^2(ax+b)}=-\frac{1}{a}\cot(ax+b)+C$
+ $\int\cos x dx=\sin x+C$	+ $\int\frac{dx}{\sqrt{ax+b}}=\frac{2}{a}\sqrt{ax+b}+C$
+ $\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\tan x+C$	+ $\int e^{ax+b}dx=\frac{1}{a}e^{ax+b}+C$
+ $\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\cot x+C$	

Chú ý: $\int \frac{ax+b}{(cx-\alpha)(dx-\beta)}dx$

- Tách phân thức trong tích phân trở thành: $p\left(\frac{1}{cx-\alpha}\right)+q\left(\frac{1}{dx-\beta}\right)$
- Lấy nghiệm của $cx-\alpha$ thay vào $\frac{ax+b}{dx-\beta}$ ta được p
- Lấy nghiệm của $dx-\beta$ thay vào $\frac{ax+b}{cx-\alpha}$ ta được q

Dạng 1: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp phân tích

Ví dụ 1.

1. Gọi $F(x)$ là nguyên hàm của hàm số $f(x)=\sin 2x.\tan x$ thỏa mãn $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

   Tính $F\left(\frac{\pi}{4}\right)$.

2. Xác định a, b, c sao cho $F(x)=\left(ax^2+bx+c\right)\sqrt{2x-4}$ là 1 nguyên hàm của hàm số $f(x)=\frac{20x^2-29x+7}{\sqrt{2x-4}}$ trong $(2;+\infty)$.

Lời giải

1. Ta có: $F(x)=\int \sin 2x.\tan x dx=\int 2\sin x.\cos x.\frac{\sin x}{\cos x}dx=2\int \sin^2 x dx$

$$F(x)=\int (1-\cos 2x)dx=x-\frac{\sin 2x}{2}+C$$

Mà: $F\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}\Leftrightarrow \frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{3}+C=\frac{\sqrt{3}}{4}\Rightarrow C=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$

Vậy: $F(x)=x-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}$

$$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\sin 2\left(\frac{\pi}{4}\right)+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}-1}{2}-\frac{\pi}{12}.$$

2. Ta có: $F'(x)=\frac{5ax^2+(3b-8a)x+c-4b}{\sqrt{2x-4}}$

Ta luôn có: $F'(x)=f(x)$, $\forall x>2$ khi và chỉ khi $\begin{cases}5a=20\\3b-8a=-29\\c-4b=7\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\b=1\\c=11\end{cases}$

Vậy, $F(x)=\left(4x^2+x+11\right)\sqrt{2x-4}$.

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm :

$I_1=\int \frac{x}{(x+1)^5}dx$ $\qquad$ $I_2=\int \sin 3x\cos 5x dx$

Lời giải

1. $I_1=\int \frac{x}{(x+1)^5}dx=\int\left(\frac{1}{(x+1)^4}-\frac{1}{(x+1)^5}\right)d(x+1)$

$$=-\frac{1}{3(x+1)^3}+\frac{1}{4(x+1)^4}+C.$$

2. $I_2=\int \sin 3x\cos 5x dx=\frac{1}{2}\int(\sin 8x-\sin 2x)dx=\frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 8x}{8}+\frac{\cos 2x}{2}\right)+C$

Dạng 2: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp đổi biến số

“ Nếu $\int f(x)dx=F(x)+C$ thì $\int f(u(x)).u'(x)dx=F(u(x))+C$”.

Giả sử ta cần tìm họ nguyên hàm $I=\int f(x)dx$, trong đó ta có thể phân tích $f(x)dx=g(u(x))u'(x)dx$ thì ta thực hiện phép đổi biến số $t=u(x)$ $\Rightarrow dt=u'(x)dx$. Khi đó: $I=\int g(t)dt=G(t)+C=G(u(x))+C$

Chú ý: Sau khi ta tìm được họ nguyên hàm theo t thì ta phải thay $t=u(x)$.

Ví dụ 1. Tìm nguyên hàm:

1. $I_1=\int x\sqrt{x+1}dx$ $\qquad$ 2. $I_2=\int x^2.\sqrt{x^2+9}dx$

Lời giải

1. $I_1=\int x\sqrt{x+1}dx$.

Cách 1: Đặt $t=x+1\Rightarrow x=t-1$ và $dx=dt$

Khi đó $I_1=\int(t-1)\sqrt{t}dt=\int t\sqrt{t}dt-\int\sqrt{t}dt$

$$=\frac{2}{5}t^2\sqrt{t}-\frac{2}{3}t\sqrt{t}+C=2t\sqrt{t}\left(\frac{t}{5}-\frac{1}{3}\right)+C=2(x+1)\sqrt{x+1}\left(\frac{x+1}{5}-\frac{1}{3}\right)+C.$$

Cách 2: $I_1=\int(x+1)\sqrt{x+1}dx-\int\sqrt{x+1}dx=\int(x+1)\sqrt{x+1}d(x+1)-\int\sqrt{x+1}d(x+1)$

$$=\frac{2(x+1)^2\sqrt{x+1}}{5}-\frac{2(x+1)\sqrt{x+1}}{3}+C=2(x+1)\sqrt{x+1}\left(\frac{x+1}{5}-\frac{1}{3}\right)+C$$

$$=2(x+1)\sqrt{x+1}\left(\frac{3x-2}{15}\right)+C.$$

Bạn đọc xem cách giải sau có đúng không?.

Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow dt=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$ hay $dx=2\sqrt{x+1}dt=2tdt$.

Khi đó $I_1=\int(t^2-1)2tdt=2\int(t^3-t)dt=2\left(\frac{t^4}{4}-\frac{t^2}{2}\right)+C$

$$=t^2\left(\frac{t^2}{2}-1\right)+C=(x+1)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)+C=\frac{x^2-1}{2}+C.$$

2. Đặt $\sqrt{x^2+9}=x-t\Rightarrow x=\frac{t^2-9}{2t}\Rightarrow dx=\frac{t^2+9}{2t^2}dt$

$$I_2=\int\left(\frac{t^2+9}{2t^2}\right).\left(\frac{-t^2-9}{2t}\right)\frac{(t^2-9)^2}{4t^2}dt=-\frac{1}{16}\int\frac{(t^4-81)^2}{t^5}dt$$

$$=-\frac{1}{16}\int\left(t^3-\frac{162}{t}+\frac{6561}{t^5}\right)dt=-\frac{1}{16}\left(\frac{t^4}{4}-162\ln|t|-\frac{6561}{4t^4}\right)+C$$

$$=-\frac{1}{16}\left(\frac{\left(x-\sqrt{x^2+9}\right)^4}{4}-162\ln\left|x-\sqrt{x^2+9}\right|-\frac{6561}{4\left(x-\sqrt{x^2+9}\right)^4}\right)+C$$

Ví dụ 2. Tìm nguyên hàm :

1. $J_1=\int\tan^3xdx$ 2. $J_2=\int\frac{5\sin x+2\sin2x}{\cos2x+6\cos x+5}dx$ 3. $J_3=\int\frac{\tan x}{\cos^3x}dx$

Lời giải

1. $J_1=\int\tan^3xdx=\int\tan x.\tan^2xdx=\int\tan x\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$

$$=\int\frac{1}{\cos^2x}\tan xdx-\int\tan xdx=\int\frac{1}{\cos^2x}\tan xdx-\int\tan xdx=A-B$$

$$A=\int\frac{1}{\cos^2x}\tan xdx$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2x}dx$

$$A=\int\frac{1}{\cos^2x}\tan xdx=\int tdt=\frac{1}{2}t^2+C_1=\frac{1}{2}\tan^2x+C_1$$

$$B=\int\tan xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{(-\sin x.dx)}{\cos x}$$

Đặt $a=\cos x\Rightarrow da=-\sin xdx$

$$B=-\int\frac{(-\sin x.dx)}{\cos x}=-\int\frac{da}{a}=-\ln|a|+C_2=-\ln|\cos x|+C_2$$

Vậy $J_1=A-B=\frac{1}{2}\tan^2x+\ln|\cos x|+C$.

2. $I_2=\frac{1}{2}\int\frac{(4\cos x+5)\sin x.dx}{\cos^2x+3\cos x+2}$. Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx$

Khi đó $J_2=-\int\frac{4t+5}{t^2+3t+2}dt=-\int\frac{3(t+1)+(t+2)}{(t+1)(t+2)}dt$

$$=-\int\left(\frac{3}{t+2}+\frac{1}{t+1}\right)dt=-3\ln|t+2|-\ln|t+1|+C$$

$$=-3\ln|\cos x+2|-\ln|\cos x+1|+C.$$

3. $J_3=\int\frac{\tan x}{\cos^3x}dx=\int\frac{\sin x}{\cos^4x}dx$

Đặt $t=\cos x\Rightarrow dt=-\sin xdx\Rightarrow\sin xdx=-dt$

$$I_3=\int\frac{-dt}{t^4}=\frac{1}{3.t^3}+C=\frac{1}{3.\cos^3x}+C.$$

Dạng 3: Tìm nguyên hàm bằng phương pháp từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên $[a;b]$ và có đạo hàm liên tục trên $[a;b]$.

Khi đó : $\int udv=uv-\int vdu\ (*)$

Để tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$ bằng phương pháp từng phần, ta làm như sau:

Bước 1: Chọn u,v sao cho $f(x)dx=udv$ (chú ý: $dv=v'(x)dx$).

Tính $v=\int dv$ và $du=u'.dx$.

Bước 2: Thay vào công thức $(*)$ và tính $\int vdu$.

Cần phải lựa chọn u và dv hợp lí sao cho ta dễ dàng tìm được v và tích phân $\int vdu$ dễ tính hơn $\int udv$. Ta thường gặp các dạng sau

Dạng 1 : $I=\int P(x)\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}dx$, trong đó $P(x)$ là đa thức.

Với dạng này, ta đặt $u=P(x),\ dv=\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}dx$.

Dạng 2 : $I=\int(x)e^{ax+b}dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=P(x)\\ dv=e^{ax+b}dx\end{cases}$, trong đó $P(x)$ là đa thức

Dạng 3 : $I=\int P(x)\ln(mx+n)dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=\ln(mx+n)\\ dv=P(x)dx\end{cases}$.

Dạng 4 : $I=\int\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}e^{x}dx$

Với dạng này, ta đặt $\begin{cases}u=\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\\ dv=e^{x}dx\end{cases}$ để tính $\int vdu$ ta đặt $\begin{cases}u=\begin{bmatrix}\sin x\\ \cos x\end{bmatrix}\\ dv=e^{x}dx\end{cases}$.

Ví dụ. Tìm nguyên hàm:

1. $I_1=\int\frac{x}{1-\cos 2x}dx$; 2. $I_2=\int\cos 2x.e^{3x}dx$; 3. $I_3=\int(2x+1)\ln^2 xdx$

Lời giải

1. Đặt $\begin{cases}u=x\\ dv=\frac{dx}{\sin^2 x}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\ v=-\cot x\end{cases}\Rightarrow I_1=-\frac{1}{2}x\cot x+\frac{1}{2}\int\cot xdx$

$$=-\frac{1}{2}x\cot x-\frac{1}{2}\int\frac{d(\sin x)}{\sin x}=-\frac{1}{2}x\cot x-\frac{1}{2}\ln|\sin x|+C.$$

Để ý : $A=\int\cot xdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx$,

vì $(\sin x)'=\cos x\Rightarrow d(\sin x)=(\sin x)'dx=\cos xdx$

2. Đặt $\begin{cases}u=\cos 2x\\ dv=e^{3x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=-2\sin 2xdx\\ v=\frac{1}{3}e^{3x}\end{cases}\Rightarrow I_2=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{3}\int\sin 2x.e^{3x}dx$.

Đặt $\begin{cases}u_1=\sin 2x\\ dv_1=e^{3x}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du_1=2\cos 2x\\ v_1=\frac{1}{3}e^{3x}\end{cases}$

$$\Rightarrow\int\sin 2x.e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}.\sin 2x-\frac{2}{3}\int\cos 2x.e^{3x}dx=\frac{1}{3}e^{3x}.\sin 2x-\frac{2}{3}I_2$$

$$\Rightarrow I_2=\frac{1}{3}e^{3x}\cos 2x+\frac{2}{9}e^{3x}.\sin 2x-\frac{4}{9}I_2\Rightarrow I_2=\frac{e^{3x}}{13}(3\cos 2x+2\sin 2x)+C.$$

3. Đặt $\begin{cases}u=\ln^2 x\\ dv=(2x+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=2\frac{\ln x}{x}dx\\ v=x^2+x\end{cases}$

$$I_3=\left(x^2+x\right)\ln^2 x-2\int\left(x^2+x\right)\ln xdx$$

Đặt : $\begin{cases}u_1=\ln x\\ dv_1=(x+1)dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du_1=\frac{dx}{x}\\ v_1=\frac{1}{2}x^2+x\end{cases}$

Khi đó $\int(x+1)\ln xdx=\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)\ln x-\frac{1}{2}\int(x+2)dx=\frac{1}{2}\left(x^2+2x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x+C'$

Vậy $I_3=\left(x^2+x\right)\ln^2 x-\left(x^2+2x\right)\ln x+\frac{x^2}{2}+2x+C$.

Dạng 4: Tính tích phân bằng phương pháp phân tích

Ví dụ. Tính tích phân:

1. $A=\int_0^1\frac{dx}{x^2+3x+2}$; 2. $B=\int_0^1\frac{5x-13}{x^2-5x+6}dx$; 3. $C=\int_0^1\frac{x^2+x+2}{x^2-4x+4}dx$.

Lời giải

1. $A=\int_0^1\frac{dx}{(x+1)(x+2)}=\int_0^1\frac{(x+2)-(x+1)}{(x+1)(x+2)}dx=\int_0^1\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+2}\right)dx$

$$=\left(\ln|x+1|-\ln|x+2|\right)\Big|_0^1=\ln\left|\frac{x+1}{x+2}\right|\Bigg|_0^1=\left(\ln\frac{2}{3}-\ln\frac{1}{2}\right)=\ln\frac{4}{3}$$

2. Ta có: $\frac{5x-13}{(x-3)(x-2)}=\frac{a}{x-3}+\frac{b}{x-2}=\frac{a(x-3)+b(x-2)}{(x-3)(x-2)}\Rightarrow\begin{cases}a=3\\ b=2\end{cases}$

$$B=\int_0^1\left(\frac{3}{x-3}+\frac{2}{x-2}\right)dx=\left(3\ln|x-2|+2\ln|x-3|\right)\Big|_0^1=-\ln 18.$$

3. $C=\int_0^1\frac{x^2+x+2}{x^2-4x+4}dx=\int_0^1\left(1+\frac{5x-2}{x^2-4x+4}\right)dx$

Ta có: $\frac{5x-2}{x^2-4x+4}=\frac{5x-2}{(x-2)^2}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{(x-2)^2}=\frac{A(x-2)+B}{(x-2)^2}\Rightarrow\begin{cases}A=5\\B=8\end{cases}$

$$C=\int_0^1\left[\frac{5}{x-2}+\frac{8}{(x-2)^2}\right]dx=5\ln|x-2|\Big|_0^1-\frac{8}{x-2}\Big|_0^1=5\ln\frac{1}{2}+4$$

Dạng 5: Tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số

1. Phương pháp đổi biến số loại 1

Giả sử cần tính $I=\int_a^b f(x)dx$, ta thực hiện các bước sau:

Bước 1: Đặt $x=u(t)$ (*với* $u(t)$ *là hàm có đạo hàm liên tục trên* $[\alpha;\beta]$, $f(u(t))$ *xác định trên* $[\alpha;\beta]$ *và* $u(\alpha)=a$, $u(\beta)=b$) và xác định α, β.

Bước 2: Thay vào tích phân ban đầu ta có:

$$I=\int_\alpha^\beta f(u(t)).u'(t)dt=\int_\alpha^\beta g(t)dt=G(t)\Big|_\alpha^\beta=G(\beta)-G(\alpha).$$

Một số dạng thường dùng phương pháp đổi biến số loại 1

* Hàm số dưới dấu tích phân chứa $\sqrt{a^2-b^2x^2}$ ta thường đặt $x=\frac{a}{b}\sin t$

* Hàm số dưới dấu tích phân chứa $\sqrt{b^2x^2-a^2}$ ta thường đặt $x=\frac{a}{b\sin t}$

* Hàm số dưới dấu tích phân chứa $a^2+b^2x^2$ ta thường đặt $x=\frac{a}{b}\tan t$

* Hàm số dưới dấu tích phân chứa $\sqrt{x(a-bx)}$ ta thường đặt $x=\frac{a}{b}\sin^2 t$

2. Phương pháp đổi biến số loại 2

Tương tự như nguyên hàm, ta có thể tính tích phân bằng phương pháp đổi biến số (ta gọi là loại 2) như sau:

Để tính tích phân $I=\int_a^b f(x)dx$, nếu $f(x)=g[u(x)].u'(x)$, ta có thể thực hiện phép đổi biến như sau

Bước 1: Đặt $t=u(x)\Rightarrow dt=u'(x)dx$.

Đổi cận $x=a\Rightarrow t=u(a)$, $x=b\Rightarrow t=u(b)$

Bước 2: Thay vào ta có $I=\int_{u(a)}^{u(b)} g(t)dt=G(t)\Big|_a^b$.

Ví dụ 1. Tính tích phân:

1. $I_1=\int_1^2\frac{x}{1+\sqrt{x-1}}dx$ 2. $I_2=\int_{-8}^{-3}\frac{1}{x\sqrt{1-x}}dx$

3. $I_3=\int_2^6\frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}$ 4. $I_4=\int_0^1\frac{x^3dx}{x+\sqrt{x^2+1}}$

Lời giải

1. Đặt $t=\sqrt{x-1}\Leftrightarrow x=t^2+1\Leftrightarrow dx=2tdt$

Đổi biến: $x=1\Rightarrow t=0$, $x=2\Rightarrow t=1$

Vậy, $I_1=\int_0^1\frac{t^2+1}{1+t}2tdt=2\int_0^1\frac{t^3+t}{t+1}dt=2\int_0^1\left(t^2-t+2-\frac{2}{t+1}\right)dt$

$$=2\left[\frac{t^3}{3}-\frac{t^2}{2}+2t-2\ln|t+1|\right]_0^1=2\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+2-2\ln 2\right)=\frac{11}{3}-4\ln 2$$

2. Đặt $t=\sqrt{1-x}\Rightarrow -2tdt=dx$

Đổi cận: $x=-8\Rightarrow t=3$, $x=-3\Rightarrow t=2$

Vậy, $I_2=\int_{-8}^{-3}\frac{dx}{x\sqrt{1-x}}dx=-2\int_3^2\frac{tdt}{(1-t^2)t}=2\int_3^2\frac{dt}{t^2-1}=\int_3^2\frac{(t+1)-(t-1)}{(t-1)(t+1)}dt$

$$=\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)\Big|_3^2=\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\Big|_3^2=\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{1}{2}=\ln\frac{2}{3}$$

3. Đặt $t=\sqrt{4x+1}\Rightarrow t^2=4x+1\Rightarrow dx=\frac{1}{2}tdt$

Đổi cận: $x=2\Rightarrow t=3$, $x=6\Rightarrow t=5$

Do đó: $I_3=\int_2^6\frac{dx}{2x+1+\sqrt{4x+1}}=\int_3^5\frac{tdt}{(t+1)^2}=\int_3^5\left[\frac{1}{t+1}-\frac{1}{(t+1)^2}\right]dt$

$$=\left(\ln|t+1|+\frac{1}{(t+1)}\right)\Big|_3^5=\ln\frac{3}{2}-\frac{1}{12}$$

4. $I_4=\int_0^1\frac{x^3\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}{\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\left(x-\sqrt{x^2+1}\right)}dx=\int_0^1 x^3\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)dx$

$$=\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx-\int_0^1 x^4dx=J-\frac{x^5}{5}\Big|_0^1=J-\frac{1}{5},\text{ với } J=\int_0^1 x^3\sqrt{x^2+1}dx$$

Đặt $t=\sqrt{x^2+1}\Rightarrow t^2=x^2+1\Rightarrow 2tdt=2xdx\Rightarrow tdt=xdx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1,\ \ x=1\Rightarrow t=\sqrt{2}$.

Khi đó $J=\int\limits_0^1 x^2\sqrt{x^2+1}xdx=\int\limits_1^{\sqrt2}\left(t^2-1\right)t.tdt=\int\limits_1^{\sqrt2}\left(t^4-t^2\right)dt=\left(\frac{t^5}{5}-\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_1^{\sqrt2}$

$$=\left(\frac{4\sqrt2}{5}-\frac{2\sqrt2}{3}\right)-\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\right)=\frac{2\sqrt2}{15}+\frac{2}{15}$$

Ví dụ 2. Tính tích phân: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-2\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx$

Lời giải

Đặt $x=\frac{\pi}{2}-t\Rightarrow dx=-dt, x=0\Rightarrow t=\frac{\pi}{2}, x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=0.$

Suy ra: $I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-2\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos t-2\sin t}{(\cos t+\sin t)^3}dt=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x-2\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}dx$

$$2I=I+I=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\sin x-2\cos x}{(\sin x+\cos x)^3}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{3\cos x-2\sin x}{(\cos x+\sin x)^3}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{(\sin x+\cos x)^2}dx$$

$$=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}dx=\frac{1}{2}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\cos^2\left(x-\frac{\pi}{4}\right)}d\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}\tan\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=1$$

Dạng 6: Tính tích phân bằng phương pháp đổi từng phần

Cho hai hàm số u và v liên tục trên [a;b] và có đạo hàm liên tục trên [a;b].

Khi đó : $\int\limits_a^b udv=uv\Big|_a^b-\int\limits_a^b vdu$

Ví dụ 1. Tính tích phân:

1. $A=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{\ln x}{(x+1)^2}dx$; 2. $B=\int\limits_3^8\frac{\ln x}{\sqrt{x+1}}dx$; 3. $C=\int\limits_1^4\frac{\ln(5-x)+x^3.\sqrt{5-x}}{x^2}dx$

Lời giải

1. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{dx}{(x+1)^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=\dfrac{-1}{x+1}\end{cases}$

Khi đó $A=\left(\frac{-1}{x+1}.\ln x\right)\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{e}+\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x(x+1)}=-1+I$

$$I=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{dx}{x(x+1)}=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\frac{(x+1)-x}{x(x+1)}dx=\int\limits_{\frac{1}{e}}^{e}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x+1}\right)dx=\left(\ln|x|-\ln|x+1|\right)\Big|_{\frac{1}{e}}^{e}$$

$$=\left(\ln\left|\frac{x}{x+1}\right|\right)\Bigg|_{\frac{1}{e}}^{e}=\ln\frac{e}{e+1}-\ln\frac{\frac{1}{e}}{\frac{1}{e}+1}=\ln e=1.$$

Vậy, $I=0$.

2. Đặt: $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=\dfrac{dx}{\sqrt{x+1}}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=2\sqrt{x+1}\end{cases}$

Khi đó: $B=\left(2\sqrt{x+1}\ln x\right)\Big|_3^8-2\int\limits_3^8\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx=6\ln8-4\ln3-2I$

Với $I=\int\limits_3^8\frac{\sqrt{x+1}}{x}dx$. Đặt $t=\sqrt{x+1}$

$$\Rightarrow I=\int\limits_2^3\frac{t}{t^2-1}.2tdt=2\int\limits_2^3\frac{t^2}{t^2-1}dt=\int\limits_2^3\left(2+\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$=\left(2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Bigg|_2^3=2+\ln3-\ln2$$

Vậy, $B=20\ln2-6\ln3-4$

3. $C=\int\limits_1^4\frac{\ln(5-x)+x^3.\sqrt{5-x}}{x^2}dx=\int\limits_1^4\frac{\ln(5-x)}{x^2}dx+\int\limits_1^4 x\sqrt{5-x}.dx=K+H$

$K=\int\limits_1^4\frac{\ln(5-x)}{x^2}dx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln(5-x)\\ dv=\dfrac{dx}{x^2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{5-x}\\ v=-\dfrac{1}{x}\end{cases}$

$$K=\left.\frac{\ln(5-x)}{x}\right|_1^4-\int_1^4\frac{dx}{x(5-x)}=\ln4-\frac{1}{5}\left[-\ln(5-x)\right]\Big|_1^4+\ln x\Big|_1^4=\frac{3}{5}\ln4$$

$H=\int_1^4 x\sqrt{5-x}.dx$. Đặt $t=\sqrt{5-x}\Rightarrow 2tdt=-dx$

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2,\ \ x=4\Rightarrow t=1$

$$H=\int_2^1\left(5-t^2\right)t(-2t)dt=2\left.\left(\frac{5}{3}t^3-\frac{t^5}{5}\right)\right|_1^2=\frac{164}{15}$$

Vậy, $C=K+H=\frac{3}{5}\ln4+\frac{164}{15}$

Ví dụ 2. Tính tích phân: $I=\int_{-1}^{0}\frac{x\ln(x+2)}{\sqrt{4-x^2}}dx.$

Lời giải

Đặt $u=\ln(x+2), dv=\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}dx$. Khi đó $du=\frac{dx}{x+2}, v=-\sqrt{4-x^2}$.

Theo công thức tích phân từng phần, ta có

$$I=-\sqrt{4-x^2}\ln(x+2)\Big|_{-1}^{0}+\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}dx=-2\ln2+\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}dx.$$

Đặt $x=2\sin t$. Khi đó $dx=2\cos tdt$. Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=-\frac{\pi}{6},\ \ x=0\Rightarrow t=0.$

$$J=\int_{-1}^{0}\frac{\sqrt{4-x^2}}{x+2}dx=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}\frac{4\cos^2t}{2\sin t+2}dt=2\int_{-\frac{\pi}{6}}^{0}(1-\sin t)dt=2(t+\cos t)\Big|_{-\frac{\pi}{6}}^{0}=2+\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}.$$

Suy ra $I=-2\ln2+2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}$.

Dạng 7: Ứng dụng tích phân

Bài toán 1: Diện tích hình phẳng giới hạn

Cho hàm số $y=f(x)$ liên tục trên $[a;b]$. Khi đó diện tích S của hình phẳng (D) giới hạn bởi: Đồ thị hàm số $y=f(x)$; trục $Ox:\ (y=0)$ và hai đường thẳng $x=a;x=b$ là: $S=\int_a^b|f(x)|dx$.

$\int_a^b|f(x)|dx=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ công thức này chỉ đúng khi $f(x)$ không đổi dấu trên khoảng $(a;b)$.

Nếu: $f(x)\ge0$, $\forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b|f(x)|dx=\int_a^b f(x)dx$

Nếu $f(x)\le0$, $\forall x\in[a;b]$ thì $\int_a^b|f(x)|dx=-\int_a^b f(x)dx$

Chú ý: Nếu phương trình $f(x)=0$ có k nghiệm phân biệt $x_1,x_2,...,x_k$ trên (a; b) thì trên mỗi khoảng $(a;x_1),(x_1;x_2)...(x_k;b)$ biểu thức $f(x)$ ***không đổi dấu.***

Khi đó tích phân $S=\int_a^b|f(x)|dx$ được tính như sau:

$$S=\int_a^b|f(x)|dx=\left|\int_a^{x_1}f(x)dx\right|+\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\right|+...+\left|\int_{x_k}^{b}f(x)dx\right|.$$

Công thức tính diện tích hình phẳng giới hạn bởi các đường:

$y=f(x)$ và $y=g(x)$ và hai đường thẳng $x=a,x=b(a<b)$: $S=\int_a^b|f(x)-g(x)|dx$.

Ví dụ 1. Tính diện tích S của hình phẳng H giới hạn bởi :

1. Đồ thị hàm số: $y=-\sqrt{x}$, trục hoành và đường thẳng $y=2-x$.

2. Đồ thị hàm số: $y=(e+1)x$ và $y=\left(e^x+1\right)x$.

Lời giải

1. Hoành độ giao điểm của đồ thị hàm số: $y=-\sqrt{x}$ và đường thẳng $y=2-x$ là nghiệm của phương trình: $-\sqrt{x}=2-x\Leftrightarrow\sqrt{x}=x-2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge2\\x=x^2-4x+4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge2\\x^2-5x+4=0\end{cases}\Leftrightarrow x=4$$

Diện tích hình phẳng H : $S=\int_0^2\sqrt{x}dx+\int_2^4\left(2-x+\sqrt{x}\right)dx$

$$=\left[\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_0^2+\left[2x-\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{x^3}\right]_2^4=\frac{4\sqrt{2}}{3}+\left(\frac{16}{3}-2-\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)=\frac{10}{3}$$

2. Phương trình hoành độ giao điểm:

$$(e+1)x=\left(1+e^x\right)x \Leftrightarrow x\left(e^x-e\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ e^x=e \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=1 \end{array}\right.$$

Diện tích hình phẳng H : $S=\int_0^1\left|(e+1)x-\left(1+e^x\right)x\right|dx=\int_0^1\left|x\left(e-e^x\right)\right|dx$

Với $\forall x\in[0;1]$, ta luôn có: $x\left(e-e^x\right)\ge 0$

Vậy, $S=\int_0^1\left[x\left(e-e^x\right)\right]dx$

Đặt $\begin{cases} u=x \\ dv=\left(e-e^x\right)dx \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} du=dx \\ v=ex-e^x \end{cases}$

$$S=\left[x\left(ex-e^x\right)\right]_0^1-\int_0^1\left(ex-e^x\right)dx=-\left[\frac{ex^2}{2}-e^x\right]_0^1=-\left[\left(\frac{e}{2}-e\right)-(-1)\right]=\frac{e}{2}-13.$$

$$S=\int_{\ln 3}^{\ln 8}\sqrt{e^x+1}dx.$$

Đặt $t=\sqrt{e^x+1}\Leftrightarrow t^2=e^x+1\Rightarrow e^x=t^2-1\Rightarrow e^xdx=2tdt$ hay $dx=\frac{2t}{t^2-1}dt$

Khi đó: $S=\int_2^3\frac{2t^2}{t^2-1}dt=\int_2^3\left(2+\frac{2}{t^2-1}\right)dt=\left(2t+\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_2^3=2+\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Ví dụ 2.

1. Cho hàm số $y=x^4-(m+1)x^2+m$ có đồ thị (C_m). Xác định $m>1$ để đồ thị (C_m) cắt trục Ox tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) và trục Ox có diện tích phần phía trên trục Ox bằng diện tích phần phía dưới trục Ox.
2. Tìm các giá trị tham số $m\in\mathbb{R}$ sao cho: $y=x^4-\left(m^2+2\right)x^2+m^2+1$, có đồ thị (C_m) cắt trục hoành tại 4 điểm phân biệt sao cho hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành phần phía trên Ox có diện tích bằng $\frac{96}{15}$.

Lời giải

1. Đồ thị hàm số cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^4-(m+1)x^2+m=0$ (1) có 4 nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow t^2-(m+1)t+m=0$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta=(m+1)^2-4m>0 \\ m+1>0 \\ m>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<m\ne 1$$

Với $0<m\ne 1$ thì phương trình (2) có 2 nghiệm là $t=1$, $t=m$, vì $m>1$ nên 4 nghiệm phân biệt của (1) theo thứ tự tăng là: $-\sqrt{m},-1,1,\sqrt{m}$

Theo bài toán, ta có:

$$S_{H_1}=S_{H_2}\Leftrightarrow\int_0^1\left|x^4-(m+1)x^2+m\right|dx=\int_1^{\sqrt{m}}\left|x^4-(m+1)x^2+m\right|dx$$

$$\Leftrightarrow\int_0^1\left[x^4-(m+1)x^2+m\right]dx=-\int_1^{\sqrt{m}}\left[x^4-(m+1)x^2+m\right]dx$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{\sqrt{m}}\left[x^4-(m+1)x^2+m\right]dx=0\left(\frac{x^5}{5}-(m+1)\frac{x^3}{3}+mx\right)\Big|_0^{\sqrt{m}}=0$$

$$\Leftrightarrow\frac{m}{5}-\frac{m+1}{3}+1=0\Leftrightarrow m=5$$

Vậy, $m=5$ thỏa bài toán.

2. Đồ thị hàm số cắt Ox tại 4 điểm phân biệt $\Leftrightarrow x^4-\left(m^2+2\right)x^2+m^2+1=0$ (*) hay $\left(x^2-1\right)\left(x^2-m^2-1\right)=0$ có 4 nghiệm phân biệt, tức $m\ne 0$.

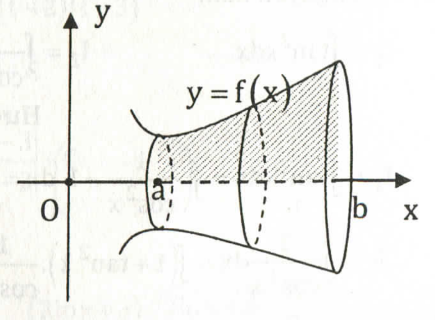
Với $m\ne 0$ thì phương trình (*) có 4 nghiệm phân biệt $\pm 1;\pm\sqrt{m^2+1}$

Diện tích phần hình phẳng giới hạn bởi (C_m) với trục hoành phần phía trên trục hoành là:

$$S=2\int_0^1\left[x^4-\left(m^2+2\right)x^2+m^2+1\right]dx=\frac{96}{15}\Leftrightarrow\frac{20m^2+16}{15}=\frac{96}{15}\Leftrightarrow m=\pm 2$$

Bài toán 2: Thể tích vật thể tròn xoay

Tính thể tích vật thể tròn xoay khi quay miền D được giới hạn bởi các đường $y=f(x);y=0;x=a;x=b$ quanh trục Ox.



Thiết diện của khối tròn xoay cắt bởi mặt phẳng vuông góc với Ox tại điểm có hoành độ bằng x là một hình tròn có bán kính $R=|f(x)|$ nên diện tích thiết diện bằng

$S(x)=\pi R^2=\pi f^2(x)$. Vậy thể tích khối tròn xoay được tính theo công thức:

$$V=\int_a^b S(x)dx=\pi\int_a^b f^2(x)dx.$$

Ví dụ. Cho hình phẳng H giới hạn bởi các đường : $y=x\ln x,\ y=0,\ x=e$. Tính thể tích của khối tròn xoay tạo thành khi quay hình H quanh trục Ox.

Lời giải

Phương trình hoành độ giao điểm: $x\ln x=0\Rightarrow x=1$.

Vậy, $V_{Ox}=\pi\int_1^e(x\ln x)^2dx=\pi\int_1^e x^2\ln^2 xdx=\pi I_1$

Đặt: $\begin{cases}u=\ln^2 x\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2\ln x}{x}dx\\ v=\int x^2dx=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$

$$I_1=\left[\frac{x^3}{3}\ln^2 x\right]_1^e-\frac{2}{3}\int_1^e x^2\ln xdx=\frac{e^3}{3}-\frac{2}{3}I_2 \text{ với } I_2=\int_1^e x^2\ln xdx$$

Đặt: $\begin{cases}u=\ln x\\ dv=x^2dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{dx}{x}\\ v=\dfrac{x^3}{3}\end{cases}$

$$I_2=\left[\frac{x^3}{3}\ln x\right]_1^e-\frac{1}{3}\int_1^e x^2dx=\frac{e^3}{3}-\left[\frac{x^3}{9}\right]_1^e=\frac{e^3}{3}-\left(\frac{e^3}{9}-\frac{1}{9}\right)=\frac{2e^3+1}{9}$$

Vậy, $V_{Ox}=\pi\left[\dfrac{e^3}{3}-\dfrac{2}{3}.\dfrac{2e^3+1}{9}\right]=\dfrac{\pi(5e^3-2)}{27}$ (đvtt).

Bài tập tự luyện

1. Tính nguyên hàm

$I_1=\int\tan^2xdx$ $\qquad I_2=\int\dfrac{1}{\cos^4x}dx$ $\qquad I_3=\int\dfrac{1}{1+\sin x}dx$

Hướng dẫn giải

$$I_1=\int\tan^2xdx=\int\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\int\frac{1}{\cos^2x}dx-\int dx=\tan x-x+C.$$

$$I_2=\int\frac{1}{\cos^4x}dx=\int(1+\tan^2x).\frac{1}{\cos^2x}dx$$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\dfrac{1}{\cos^2x}dx$

Khi đó $I_2=\int(1+t^2)dt=t+\dfrac{1}{3}t^3+C=\tan x+\dfrac{1}{3}\tan^3x+C$.

$$I_3=\int\frac{1}{1+\sin x}dx=\int\frac{1}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}dx=\int\frac{-2d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}{2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)}$$

$$=-\int\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)d\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)=-\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)+C.$$

2. Tính nguyên hàm

$I_1=\int\dfrac{1}{\cos x\sin^2x}dx$ $\qquad I_2=\int\dfrac{\cos x}{\sin^2x-5\sin x+6}dx$ $\qquad I_3=\int\dfrac{\sqrt{2\ln x+3}}{x}dx$

Hướng dẫn giải

- $I_1=\int\dfrac{1}{\cos x\sin^2x}dx=\int\dfrac{\cos x}{(1-\sin^2x)\sin^2x}dx$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$

$$I_1=\int\frac{dt}{(1-t^2)t^2}=\int\frac{t^2-(1-t^2)}{(1-t^2)t^2}dt=\int\left(\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t^2-1}\right)dt$$

$$=\int\frac{1}{t^2}dt-\int\frac{1}{2}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}(\ln|t-1|-\ln|t+1|)+C$$

$$=-\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|+C=-\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C.$$

- $I_2=\int\dfrac{\cos x}{\sin^2x-5\sin x+6}dx$

Đặt $t=\sin x\Rightarrow dt=\cos x.dx$.

$$I_2=\int\frac{1}{t^2-5t+6}dt=\int\frac{1}{(t-2)(t-3)}dt=\int\frac{(t-2)-(t-3)}{(t-2)(t-3)}dt$$

$$=\int\frac{1}{t-3}dt-\int\frac{1}{t-2}dt=\ln|t-3|-\ln|t-2|+C$$

- $I_3=\int\dfrac{\sqrt{2\ln x+3}}{x}dx=\ln\left|\dfrac{t-3}{t-2}\right|+C=\ln\left|\dfrac{\sin x-3}{\sin x-2}\right|+C.$

Đặt $t=2\ln x+3\Rightarrow dt=\dfrac{2}{x}dx\Rightarrow\dfrac{1}{2}dt=\dfrac{1}{x}dx$.

Khi đó $I_3=\int\dfrac{1}{2}\sqrt{t}dt=\dfrac{1}{2}.\dfrac{2}{3}t\sqrt{t}+C=\dfrac{t\sqrt{t}}{3}+C=\dfrac{(2\ln x+3)\sqrt{2\ln x+3}}{3}+C$

3. Tính tích phân:

a. $I=\int_0^1 \frac{4x-2}{\left(x^2+1\right)(x+2)}dx$ **b.** $J=\int_0^1 \frac{x^2dx}{x^6-9}$.

Hướng dẫn giải

a. Ta có: $\frac{4x-2}{(x+2)\left(x^2+1\right)}=\frac{A}{x+2}+\frac{Bx+C}{x^2+1}=\frac{x^2(A+B)+x(2B+C)+2C+A}{(x+2)\left(x^2+1\right)}$

Đồng nhất thức 2 vế, ta được: $\begin{cases}A+B=0\\2B+C=4\\2C+A=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}A=-2\\B=2\\C=0\end{cases}$

Vậy, $I=\int_0^1 \frac{4x-2}{\left(x^2+1\right)(x+2)}dx=\int_0^1\left(-\frac{2}{x+2}+\frac{2x}{x^2+1}\right)dx$

$$=\left[-2\ln|x+2|+\ln\left|x^2+1\right|\right]\Big|_0^1=-2\ln3+\ln2+\ln2-\ln1=\ln\frac{4}{9}.$$

b. Đặt $t=x^3\Rightarrow dt=3x^2dx$

$$J=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{t^2-9}=\frac{1}{3}\int_0^1\frac{dt}{(t-3)(t+3)}=\frac{1}{18}\int_0^1\frac{(t+3)-(t-3)}{(t-3)(t+3)}dt=\frac{1}{18}\int_0^1\left(\frac{1}{t-3}-\frac{1}{t+3}\right)dt$$

$$=\frac{1}{18}\left(\ln|t-3|-\ln|t+3|\right)\Big|_0^1=\frac{1}{18}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right|\Bigg|_0^1=\frac{1}{18}\left(\ln\frac{1}{2}-\ln1\right)=\frac{1}{18}\ln\frac{1}{2}$$

5. Tính tích phân:

a. $I_1=\int_0^3\frac{x-3}{3.\sqrt{x+1}+x+3}dx$ **b.** $I_2=\int_2^{2\sqrt5}\frac{xdx}{\left(x^2+1\right)\sqrt{x^2+5}}$ **c.** $I_3=\int_1^{\sqrt3}\frac{dx}{x+x^3}$

d. $I_4=\int_1^{2\sqrt2}\frac{\sqrt[3]{x-x^3}+2011x}{x^4}dx$ **e.** $I_5=\int_3^5\sqrt{x^2-9}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx$

Hướng dẫn giải

a. Đặt $t=\sqrt{x+1}\Rightarrow t^2-1=x\Rightarrow 2tdt=dx$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=1,\quad x=3\Rightarrow t=2$

Khi đó: $I=\int_1^2\frac{2t^3-8t}{t^2+3t+2}dt=\int_1^2(2t-6)dt+6\int_1^2\frac{1}{t+1}dt=\left(t^2-6t\right)\Big|_1^2+6\ln|t+1|\Big|_1^2$

Hay $I_1=-3+6\ln\frac{3}{2}$

b. Đặt $t=\sqrt{x^2+5}\Rightarrow t^2=x^2+5\Rightarrow xdx=tdt$

Đổi biến: $x=2\Rightarrow t=3$, $x=2\sqrt5\Rightarrow t=5$

Khi đó: $I=\int_3^5\frac{tdt}{\left(t^2-4\right)t}=\int_3^5\frac{dt}{t^2-4}=\frac{1}{4}\int_3^5\left(\frac{1}{t-2}-\frac{1}{t+2}\right)dt=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{t-2}{t+2}\right|\Bigg|_3^5=\frac{1}{4}\ln\frac{15}{7}$

c. Đặt $t=1+x^2\Rightarrow dt=2xdx$.

Đổi cận: $x=1\Rightarrow t=2,\ x=\sqrt3\Rightarrow t=4$.

Khi đó $I_3=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{dt}{t(t-1)}=\frac{1}{2}\int_2^4\frac{t-(t-1)}{t(t-1)}dt=\frac{1}{2}\int_2^4\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt$

$$=\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t|\right)\Big|_2^4=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{t-1}{t}\right|\Bigg|_2^4=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{3}{4}-\ln\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\ln\frac{3}{2}$$

d. $I_4=\int_1^{2\sqrt2}\frac{\sqrt[3]{x-x^3}+2011x}{x^4}dx=\int_1^{2\sqrt2}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}}{x^3}dx+\int_1^{2\sqrt2}\frac{2011}{x^3}dx=M+N$

$M=\int_1^{2\sqrt2}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}}{x^3}dx$. Đặt $t=\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}\Rightarrow t^3=\frac{1}{x^2}-1\Rightarrow 3t^2dt=-\frac{2}{x^3}dx$

Đổi cận: $x=1\Leftrightarrow t=0,\ x=2\sqrt2\Rightarrow t=-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}$

Khi đó $M=\int_1^{2\sqrt2}\frac{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}-1}}{x^3}dx=-\frac{3}{2}\int_0^{-\frac{\sqrt[3]{7}}{2}}t^3dt=-\frac{21\sqrt[3]{7}}{128}$

$$N=\int_1^{2\sqrt2}\frac{2011}{x^3}dx=\int_1^{2\sqrt2}2011x^{-3}dx=-\frac{2011}{2x^2}\Bigg|_1^{2\sqrt2}=\frac{14077}{16}$$

Vậy, $I_4=M+N=\frac{14077}{16}-\frac{21\sqrt[3]{7}}{128}$

e. $I_5=\int_3^5\sqrt{x^2-9}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2-9}}\right)dx=\int_3^5\left(\sqrt{x^2-9}+x\right)dx$

Đặt $t=\sqrt{x^2-9}+x\Rightarrow x=\frac{t^2+9}{2t}\Rightarrow dx=\frac{t^2-9}{2t^2}dt$

Đổi cận: $x=3\Rightarrow t=3\quad x=5\Rightarrow t=9$

Khi đó $I=\int_3^9 t\left(\frac{t^2-9}{2t^2}\right)dt=\frac{1}{2}\int_3^9\left(t-\frac{9}{t}\right)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{2}-9\ln|t|\right)\Bigg|_3^9=18-\frac{9}{2}\ln3$

6. Tính tích phân:

a. $I_1 = \int\limits_0^{3\ln 2} \frac{dx}{\left(\sqrt[3]{e^x}+2\right)^2}$ **b.** $I_2 = \int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{dx}{x\sqrt{x^2+4}}$ **c.** $I_3 = \int\limits_{-1}^{2} \frac{\sqrt{x^3+x^2}}{x+4}dx$

d. $I_4 = \int\limits_1^e \frac{\sqrt{1+3\ln x}\ln x}{x}dx$ **e.** $I_5 = \int\limits_0^2 \frac{2x^3-3x^2+x}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$

Hướng dẫn giải

a. Đặt $u = e^{\frac{x}{3}} \Rightarrow 3du = e^{\frac{x}{3}}dx$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow u = 1,\ x = 3\ln 2 \Rightarrow u = 2$

Khi đó: $I = \int\limits_1^2 \frac{3du}{u(u+2)^2} = 3\int\limits_1^2 \left(\frac{1}{4u} - \frac{1}{4(u+2)} - \frac{1}{2(u+2)^2}\right)du$

$$= \left(\frac{1}{4}\ln|u| - \frac{1}{4}\ln|u+2| + \frac{1}{2(u+2)}\right)\Bigg|_1^2 = \frac{3}{4}\ln\left(\frac{3}{2}\right) - \frac{1}{8}$$

b. Cách 1: Đặt $t = \sqrt{x^2+4} \Rightarrow x^2 = t^2 - 4, xdx = tdt$

Đổi cận: $x = \sqrt{5} \Rightarrow t = 3,\ x = 2\sqrt{3} \Rightarrow t = 4.$

Khi đó: $I = \int\limits_{\sqrt{5}}^{2\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^2\sqrt{x^2+4}} = \int\limits_3^4 \frac{tdt}{\left(t^2-4\right)t} = \int\limits_3^4 \frac{dt}{(t+2)(t-2)}$

$$= \frac{1}{4}\int\limits_3^4 \frac{(t+2)-(t-2)}{(t+2)(t-2)}dt = \frac{1}{4}\int\limits_3^4 \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t+2}\right)dt$$

$$= \frac{1}{4}\left(\ln|t-2| - \ln|t+2|\right)\Big|_3^4 = \frac{1}{4}\left[\ln\frac{t-2}{t+2}\right]_3^4 = \frac{1}{4}\left(\ln\frac{1}{3} - \ln\frac{1}{5}\right) = \frac{1}{4}\ln\frac{5}{3}$$

Cách 2. Đặt $t = \frac{1}{x} \Rightarrow dt = -\frac{1}{x^2}dx$

$I = \int\limits_{\frac{1}{\sqrt{5}}}^{\frac{1}{2\sqrt{3}}} \frac{dt}{\sqrt{4t^2+1}}$. Đặt $u = \ln\left(2t + \sqrt{4t^2+1}\right)$

Cách 3. Đặt $x = 2\tan v$

c. Dễ thấy: $I_3 = \int\limits_{-1}^{0} \frac{-x\sqrt{x+1}}{x+4}dx + \int\limits_0^2 \frac{x\sqrt{x+1}}{x+4}dx$

Đặt $t = \sqrt{x+1}$, khi đó $I = -2\int\limits_0^1 \frac{t^4-t^2}{t^2+3}dt + 2\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{t^4-t^2}{t^2+3}dt = A + B$

Xét : $A = 2\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{t^4-t^2}{t^2+3}dt = 2\left(\frac{t^3}{3} - 4t\right)\Bigg|_1^{\sqrt{3}} + 24\int\limits_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{t^2+3}dt$

$$B = -2\int\limits_0^1 \frac{t^4-t^2}{t^2+3}dt = -2\int\limits_0^1 \left(t^2 - 4 + \frac{12}{t^2+3}\right)dt = -2\left(\frac{t^3}{3} - 4t\right)\Bigg|_0^1 - 24\int\limits_0^1 \frac{1}{t^2+3}dt$$

Đặt $t = \sqrt{3}\tan v \Rightarrow dt = \sqrt{3}\left(1+\tan^2 v\right)dv$

Khi ấy, $\int \frac{1}{t^2+3}dt = \int \frac{\sqrt{3}\left(1+\tan^2 v\right)}{3\left(1+\tan^2 v\right)}dv = \frac{1}{\sqrt{3}}v + C$

Vậy, $I = \frac{44 - 18\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\pi}{3}$

d. Đặt $t = \sqrt{1+3\ln x} \Rightarrow t^2 = 1 + 3\ln x \Rightarrow 2tdt = \frac{3dx}{x} \Leftrightarrow \frac{dx}{x} = \frac{2tdt}{3}$

Đổi cận: $x = 0 \Rightarrow t = 1,\ x = 1 \Rightarrow t = 0.$

Khi đó:

$$I = \int\limits_0^1 x^2\sqrt{1-x^2}xdx = \int\limits_1^0 \left(1-t^2\right)t(-tdt) = \int\limits_0^1 \left(t^2 - t^4\right)dt = \left(\frac{t^3}{3} - \frac{t^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \frac{2}{15}.$$

e. $I_5 = \int\limits_0^2 \frac{\left(x^2-x\right)(2x-1)}{\sqrt{x^2-x+1}}dx$. Đặt $t = \sqrt{x^2-x+1} \Rightarrow I_5 = 2\int\limits_1^{\sqrt{3}} \left(t^2-1\right)dt = \frac{4}{3}$

7. Tính tích phân:

a. $I_1 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx$ **b.** $I_2 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x + \sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx$

c. $I_3 = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sqrt[4]{\sin^3 x.\cos^5 x}}$ **d.** $I_4 = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{3\cos x - 4\sin x + 5}$

e. $I = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{(x+\cos x)dx}{4\cos^2 x + 3\sin^2 x}$ **f.** $J = \int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x\sin x + (x+1)\cos x}{x\sin x + \cos x}dx$

g. $K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{5\sin x.\cos^2 x+2\cos x}dx$ **h.** $L=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$

Hướng dẫn giải

a. $I_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin 2x}{(2+\sin x)^2}dx=2\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\cos x}{(2+\sin x)^2}dx$.

Đặt $t=2+\sin x\Rightarrow dt=\cos xdx$

Đổi biến: $x=0\Rightarrow t=2, x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=3$

Khi đó: $I=2\int\limits_2^3\frac{t-2}{t^2}dt=2\int\limits_2^3\left(\frac{1}{t}-\frac{2}{t^2}\right)dt=2\left(\ln t+\frac{2}{t}\right)\Big|_2^3=2\ln\frac{3}{2}-\frac{2}{3}$

b. Đặt $t=\sqrt{1+3\cos x}\Rightarrow 2tdt=-3\sin xdx\Rightarrow \sin xdx=-\frac{2tdt}{3}$

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=2,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

Vậy, $I_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin x\cos x+\sin x}{\sqrt{1+3\cos x}}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{(2\cos x+1)\sin xdx}{\sqrt{1+3\cos x}}$

$$=\int\limits_2^1\frac{\left(2\frac{t^2-1}{3}+1\right)\left(-\frac{2tdt}{3}\right)}{t}=\frac{2}{3}\int\limits_1^2\left(\frac{2t^2+1}{3}\right)=\frac{2}{3}\left[\frac{2t^3}{9}+\frac{t}{3}\right]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}\left[\left(\frac{16}{9}+\frac{2}{3}\right)-\left(\frac{2}{9}+\frac{1}{3}\right)\right]=\frac{34}{27}$$

c. $I_3=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt[4]{\frac{\sin^3 x}{\cos^3 x}}.\cos^8 x.}dx=\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sqrt[4]{\tan^3 x}}.\frac{1}{\cos^2 x}dx$

Đặt $t=\tan x\Rightarrow dt=\frac{1}{\cos^2 x}dx$

Đổi cận: $x=\frac{\pi}{4}\Rightarrow t=1,\ x=\frac{\pi}{3}\Rightarrow t=\sqrt{3}$

Khi đó $I=\int\limits_1^{\sqrt{3}}t^{-\frac{3}{4}}dt=4t^{\frac{1}{4}}\Big|_1^{\sqrt{3}}=4\left(\sqrt[4]{\sqrt{3}}-1\right)=4\left(\sqrt[8]{3}-1\right)$

d. Đặt $t=\tan\frac{x}{2}\Rightarrow dt=\frac{dx}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1}{2}\left(1+\tan^2\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1+t^2}{2}dx$

$\Rightarrow dx=\frac{2dt}{1+t^2}$, $\sin x=\frac{2t}{1+t^2}$, $\cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$.

Đổi cận: $x=0\Rightarrow t=0,\ x=\frac{\pi}{2}\Rightarrow t=1$

$$I=\int\limits_0^1\frac{\frac{2dt}{1+t^2}}{3\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}\right)-4\frac{2t}{1+t^2}+5}=2\int\limits_0^1\frac{dt}{3-3t^3-8t+5+5t^2}=\int\limits_0^1\frac{dt}{(t-2)^2}=-\frac{1}{t-2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\text{e.}$$

e. $I=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{(x+\cos x)dx}{4-\sin^2 x}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}+\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{4-\sin^2 x}=A+B$

+ Tính $A=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}+\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}$

Trong $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}$, Đặt $x=-t$. Dễ thấy $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{0}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}=-\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{xdx}{4-\sin^2 x}$

Suy ra $A=0$

+ Tính $B=\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos xdx}{4-\sin^2 x}$. Đặt $t=\sin x\Rightarrow B=\int\limits_{-1}^{1}\frac{dt}{4-t^2}=\left(\frac{1}{4}\ln\left|\frac{2+t}{2-t}\right|\right)\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{2}\ln 3$

Vậy: $I=\frac{1}{2}\ln 3$

f. $J=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\sin x+(x+1)\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dx+\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx=J_1+J_2$

Trong đó : $J_1=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}dx=x\Big|_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{4}$; $J_2=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{x\cos x}{x\sin x+\cos x}dx$

Đặt $t=x\sin x+\cos x\Rightarrow dt=x\cos xdx$.

Khi đó $J_2=\int\limits_1^{\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{dt}{t}=\ln|t|\Big|_1^{\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}}=\ln\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy $J=\frac{\pi}{4}+\ln\left(\frac{\pi}{4}+1\right)\frac{1}{\sqrt{2}}$.

g. $K=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x}{5\sin x.\cos^2x+2\cos x}dx=\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\tan x}{5\tan x+2\left(1+\tan^2x\right)}.\frac{1}{\cos^2x}dx$

Đặt $t=\tan x$, $K=\int\limits_0^1\frac{t}{2t^2+5t+2}dt=\frac{1}{3}\int\limits_0^1\left(\frac{2}{t+2}-\frac{1}{2t+1}\right)dt=\frac{1}{2}\ln3-\frac{2}{3}\ln2$

h. $L=\int\limits_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}}$.

$$t=\sqrt{1-x^2}\Rightarrow\begin{cases}-x^2=t^2-1\\ dt=\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2}}.dx=\dfrac{-x^2}{x\sqrt{1-x^2}}.dx\end{cases}\Rightarrow\frac{1}{t^2-1}dt=\frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}.dx$$

$$L=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{t^2-1}dt=\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\frac{1}{(t-1)(t+1)}dt=\frac{1}{2}\int\limits_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t+1}\right)dt$$

$$\Rightarrow L=\frac{1}{2}\left(\ln|t-1|-\ln|t+1|\right)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{t-1}{t+1}\right|\right)\Big|_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\left(\ln\frac{1}{3}-\ln\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{2+\sqrt{3}}{3\left(2-\sqrt{3}\right)}=\frac{1}{2}\ln\frac{7+4\sqrt{3}}{3}$$

8. Tính tích phân:

a. $A=\int\limits_1^2\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)e^{\ln x}dx$

b. $B=\int_{-1}^0x^5.e^{-x^3}dx$

c. $C=\int\limits_1^e x^5\left(\ln x+x\right)dx$

d. $D=\int\limits_{-\ln3}^0\frac{x+\sqrt[3]{e^x-e^{3x}}}{e^{3x}}dx$

e. $E=\int\limits_0^1 x\ln\left(x^2+x+1\right)dx$

f. $F=\int\limits_1^{\sqrt{3}}\frac{\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)}{x^3}dx$

Hướng dẫn giải

a. Dễ thấy, $A=\int_1^2\left(e^x+\frac{1}{x^2}\right)e^{\ln x}dx=\int_1^2xe^xdx+\int_1^2\frac{dx}{x}=I+\ln|x|\Big|_1^2=\ln2+I$

Với $I=\int_1^2xe^xdx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=e^x\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=e^x\end{cases}$

Khi đó $I=x.e^x\Big|_1^2-\int_1^2e^xdx=2e^2-e-e^x\Big|_1^2=2e^2-e-\left(e^2-e\right)=e^2$

Vậy, $A=e^2+\ln2$

b. Đặt $t=-x^3\Rightarrow dt=-3x^2dx$

Đổi cận: $x=-1\Rightarrow t=1,\ x=0\Rightarrow t=0$

$$B=\int_1^0(-t).e^t\left(-\frac{1}{3}\right)dt=-\frac{1}{3}\int_0^1t.e^tdt=-\frac{1}{3}I,\text{ với }I=\int_0^1te^tdt$$

Đặt $\begin{cases}u=t\\dv=e^tdt\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dt\\v=e^t\end{cases}$ $I=e^t.t\Big|_0^1-\int_0^1e^tdt=e-e^t\Big|_0^1=1$. Vậy, $B=-\frac{1}{3}$

c. $C=\int\limits_1^e x^5\left(\ln x+x\right)dx=\int\limits_1^e x^5\ln xdx+\int\limits_1^e x^6dx$

$I_1=\int\limits_1^e x^5\ln xdx$. Đặt $\begin{cases}u=\ln x\\dv=x^5dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{x}dx\\v=\dfrac{x^6}{6}\end{cases}$

$$I_1=\frac{x^6\ln x}{6}\Big|_1^e-\int\limits_1^e\frac{x^5}{6}dx=\frac{x^6\ln x}{6}\Big|_1^e-\frac{x^6}{36}\Big|_1^e=\frac{5e^6+1}{36}$$

$I_2=\int\limits_1^e x^6dx=\frac{x^7}{7}\Big|_1^e=\frac{e^7-1}{7}$. Vậy, $C=\frac{5e^6+1}{36}+\frac{e^7-1}{7}$

d. $D=\int\limits_{-\ln3}^0\frac{x+\sqrt[3]{e^x-e^{3x}}}{e^{3x}}dx=\int\limits_{-\ln3}^0\frac{x}{e^{3x}}dx+\int\limits_{-\ln3}^0\frac{\sqrt[3]{e^x-e^{3x}}}{e^{3x}}dx=I_1+I_2$

$I_1=\int\limits_{-\ln3}^0\frac{x}{e^{3x}}dx$. Đặt $\begin{cases}u=x\\dv=\dfrac{1}{e^{3x}}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=dx\\v=-\dfrac{1}{3.e^{3x}}\end{cases}$

$$I_1=-\frac{x}{3.e^{3x}}\Big|_{-\ln3}^0+\int\limits_{-\ln3}^0\frac{1}{3.e^{3x}}dx=\frac{26}{9}-9\ln3$$

$$I_2=\int_{-\ln3}^{0}\frac{\sqrt[3]{e^x-e^{3x}}}{e^{3x}}dx=\int_{-\ln3}^{0}\sqrt[3]{\frac{1-e^{2x}}{e^{8x}}}dx=\int_{-\ln3}^{0}\sqrt[3]{\frac{1}{e^{2x}}-1}\left(\frac{1}{e^{2x}}.dx\right)$$

Đặt $t=\frac{1}{e^{2x}}-1\Rightarrow dt=\frac{-2}{e^{2x}}dx$

$I_2=\int_8^0-\frac{1}{2}.\sqrt[3]{t}dt=6$. Vậy, $D=\frac{80}{9}-9\ln3$

e. Đặt $\begin{cases}u=\ln(x^2+x+1)\\ dv=xdx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}dx\\ v=\dfrac{x^2}{2}\end{cases}$

$$\Rightarrow E=\frac{x^2}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{2x^3+x^2}{x^2+x+1}dx=\frac{1}{2}\ln3-\frac{1}{2}J$$

Ta có $\Rightarrow J=\int_0^1\frac{2x^3+x^2}{x^2+x+1}dx=\int_0^1\left(2x-1-\frac{1}{2}.\frac{2x+1}{x^2+x+1}-\frac{1}{2}.\frac{1}{x^2+x+1}\right)dx$

$$J=x^2-x-\frac{1}{2}\ln\left(x^2+x+1\right)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{1}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}dx=-\frac{1}{2}\ln2-\frac{\pi}{6\sqrt3}$$

$$\Rightarrow E=\frac{3}{4}\sqrt2+\frac{\pi}{12\sqrt3}$$

f. Đặt $\begin{cases}u=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\\ dv=\dfrac{1}{x^3}dx\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}du=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}dx\\ v=-\dfrac{1}{2x^2}\end{cases}$

Khi đó : $F=-\frac{1}{2x^2}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\Big|_1^{\sqrt3}+\frac{1}{2}\int_1^{\sqrt3}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt2\right)-\frac{1}{6}\ln\left(2+\sqrt3\right)+\frac{1}{2}J$

Xét $J=\int_1^{\sqrt3}\frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}=\int_1^{\sqrt3}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}}\frac{dx}{x^2}$

Đặt $t=\frac{1}{x}\Rightarrow-dt=\frac{dx}{x^2}$, khi đó $J=\int_{\frac{1}{\sqrt3}}^{1}\frac{tdt}{\sqrt{t^2+1}}=\sqrt{t^2+1}\Big|_{\frac{1}{\sqrt3}}^{1}=\sqrt2-\frac{2}{\sqrt3}$

Vậy, $F=\frac{1}{2}\ln\left(1+\sqrt2\right)-\frac{1}{6}\ln\left(2+\sqrt3\right)+\frac{\sqrt2}{2}-\frac{\sqrt3}{3}$

Chuyên đề V

HÌNH HỌC KHÔNG GIAN

Để học tốt môn toán hình, các em cần:

1. Vẽ hình chính xác và cẩn thận;

2. Nắm vững các định lý căn bản hình học;

3. Sáng tạo, không suy nghĩ theo máy móc, lối mòn;

4. Làm nhiều bài tập để tích lũy kinh nghiệm.

Dạng 1: Thể tích khối đa diện

- Thể tích của khối chóp có diện tích đáy B và chiều cao h là: $V=\frac{1}{3}Bh$.
- Thể tích của khối lăng trụ có diện tích đáy B và chiều cao h là: $V=Bh$.
- Thể tích của khối hộp có diện tích đáy B và chiều cao h là: $V=Bh$.
- Thể tích khối hộp chữ nhật : $V=abc$.
- Thể tích khối lập phương: $V=a^3$.
- Tỉ số thể tích: Nếu A',B',C' thuộc các cạnh SA,SB,SC của hình chóp SBC thì:

$$\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$$

Ví dụ 1.

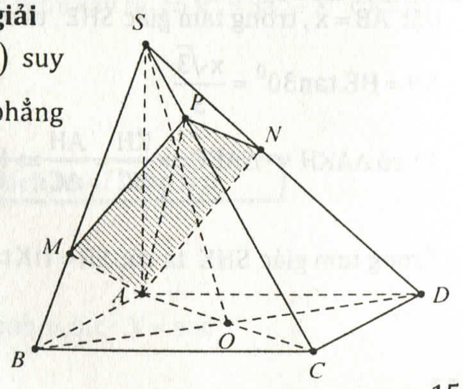
1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh a, SA vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SBD) tạo với đáy một góc 60^0. Gọi M, N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD. Mặt phẳng (AMN) cắt SC tại P. Tính thể tích khối chóp S.AMPN.
2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SAC) và (SCD) tạo với đáy lần lượt các góc 60^0 và 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Lời giải

1. Gọi O là tâm của đáy, ta có $BD\perp(SOA)$ suy ra góc $\widehat{SOA}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SBD) và mặt đáy nên $\widehat{SOA}=60^0$.

Trong tam vuông SAO ta có:

$SA=AO.\tan60^0=\frac{a\sqrt2}{2}.\sqrt3=\frac{a\sqrt6}{2}$.



Ta có: $\begin{cases} BC \perp AB \\ BC \perp SA \end{cases} \Rightarrow BC \perp (SAB)$

$\Rightarrow BC \perp AM \Rightarrow AM \perp (SBC) \Rightarrow AM \perp SC$

Tương tự: $AN \perp (SCD) \Rightarrow AN \perp SC$, từ đó suy ra: $SC \perp (AMN)$

Nên AP là đường cao của hình chóp S.AMPN

Suy ra: $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}AP.S_{AMPN}$

Áp dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông SAC, ta có:

$$\frac{SP}{SC} = \frac{SP.SC}{SC^2} = \frac{SA^2}{SA^2 + AC^2} = \frac{3}{7} \Rightarrow SP = \frac{3}{7}SC = \frac{3a\sqrt{14}}{14}$$

Trong tam giác vuông SAB, ta có: $AM = \frac{SA.AB}{SB} = \frac{a\sqrt{15}}{5}$

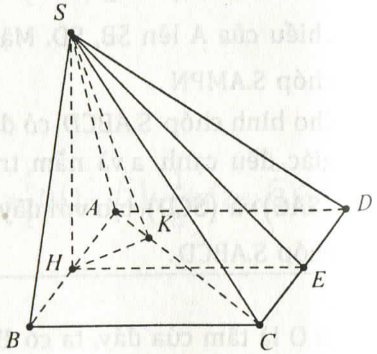
Do $\Delta SBC \backsim \Delta SPM \Rightarrow \frac{MP}{BC} = \frac{SP}{SB} \Rightarrow MP = \frac{SP.BC}{SB} = \frac{3a\sqrt{35}}{35}$

Suy ra: $S_{AMPN} = 2S_{\Delta AMP} = AM.MP = \frac{a^2\sqrt{21}}{35}$.

Vậy $V_{S.AMPN} = \frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{14}}{14}.\frac{a^2\sqrt{21}}{35} = \frac{3a^3\sqrt{6}}{70}$.

2. Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD) \Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$



Vẽ $HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{SKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt đáy nên $\widehat{SKH} = 60^0$

Vẽ $HE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow \widehat{SEH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và mặt đáy nên $\widehat{SEH} = 30^0$.

Đặt $AB = x$, trong tam giác SHE, ta có:

$SH = HE.\tan 30^0 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ (1)

Ta có $\Delta AKH \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{KH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow KH = \frac{ax}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$

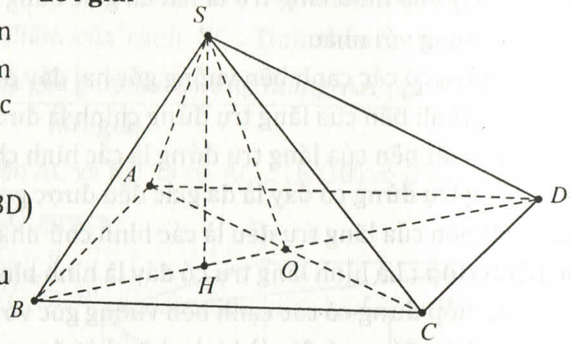
Trong tam giác SHK ta có: $SH = HK\tan 60^0 = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + x^2}}$ (2)

Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2 + x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + a^2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là: $V = \frac{1}{3}SH.AB.AD = \frac{1}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{3}.a.x = \frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, SA = SB = SC = a. Tính SD theo a để khối chóp S.ABCD có thể tích lớn nhất.

Lời giải



Gọi H là hình chiếu của S lên mặt đáy, ta suy ra H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC nên H thuộc BD.

Mặt khác $\begin{cases} BD \perp AC \\ SH \perp AC \end{cases} \Rightarrow AC \perp (SBD)$

$\Rightarrow O = BD \cap AC$ là hình chiếu của A lên mặt phẳng (SBD),

mà $AS = AB = AD = a \Rightarrow O$ là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác SBD

$\Rightarrow \Delta SBD$ vuông tại S. Đặt $SD = x$

Ta có: $SH.BD = SB.SD \Rightarrow SH = \frac{SB.SD}{BD}$ và $S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD$

Nên $V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}.\frac{SB.SD}{BD}.\frac{1}{2}AC.BD = \frac{1}{3}AB.SD.OA$

Mà $OA^2 = AB^2 - \frac{BD^2}{4} = a^2 - \frac{a^2 + x^2}{4} = \frac{3a^2 - x^2}{4}$

Do đó: $V_{S.ABCD} = \frac{1}{6}.a.x.\sqrt{3a^2 - x^2}$

Áp dụng bđt Cô-si, ta có: $x\sqrt{3a^2 - x^2} \le \frac{x^2 + 3a^2 - x^2}{2} = \frac{3a^2}{2}$

Suy ra: $V_{S.ABCD} \le \frac{1}{6}.a.\frac{3a^2}{2} = \frac{a^3}{4}$. Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow x^2 = 3a^2 - x^2 \Leftrightarrow x = \frac{a\sqrt{6}}{2}$

Vậy $V_{S.ABCD}$ lớn nhất $\Leftrightarrow SD = \frac{a\sqrt{6}}{2}$.

Dạng 2: Thể tích khối lăng trụ

Sử dụng công thức thể tích

- Thể tích khối lăng trụ: $V = B.h$
- Thể tích khối hộp chữ nhật có các cạnh a,b,c: $V = abc$

- Thể tích khối lập phương cạnh a : $V = a^3$

Để tính thể tích khối lăng trụ $A_1A_2...A_n.A_1'A_2'...A_n'$ ta cần đi tính chiều cao của lăng trụ và diện tích đáy. Các tính chất của lăng trụ:

a. Hình lăng trụ

- Các cạnh bên của hình lăng trụ song song và bằng nhau;
- Các mặt bên của hình lăng trụ là các hình bình hành;
- Hai đáy của hình lăng trụ là hai đa giác bằng nhau và nằm trong hai mặt phẳng song song với nhau.
- Lăng trụ có các cạnh bên vuông góc hai đáy được gọi là lăng trụ đứng.

  * Các cạnh bên của lăng trụ đứng chính là đường cao của nó.

  * Các mặt bên của lăng trụ đứng là các hình chữ nhật.
- Lăng trụ đứng có đáy là đa giác đều được gọi là lăng trụ đều.

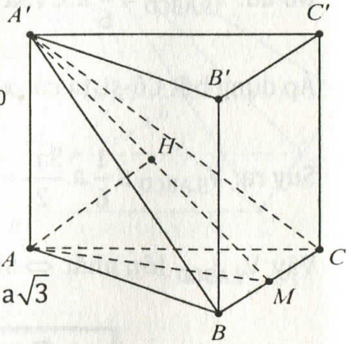
Các mặt bên của lăng trụ đều là các hình chữ nhật bằng nhau.

b. Hình Hộp : Là hình lăng trụ có đáy là hình bình hành

- Hình hộp đứng có các cạnh bên vuông góc với đáy.
- Hình hộp đứng có đáy là hình chữ nhật được gọi là hình hộp chữ nhật.
- Hình hộp chữ nhật có ba kích thước bằng nhau được gọi là hình lập phương.
- Đường chéo của hình hộp chữ nhật có ba kích thước a,b,c là $d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$
- Đường chéo của hình lập phương cạnh a là $d = a\sqrt{3}$.

Ví dụ 1. Cho lăng trụ đều ABC.A'B'C'. Biết mặt phẳng (A'BC) tạo với mặt phẳng (A'B'C') một góc 60^0 và khoảng cách từ A đến mặt phẳng (A'BC) bằng $\frac{3a}{2}$. Tính thể tích của khối lăng trụ đã cho.

Lời giải



1. Gọi M là trung điểm BC, suy ra $BC \perp (A'MA)$

nên $\widehat{A'MA} = \widehat{(A'BC),(ABC)} = \widehat{(A'BC),(A'B'C')} = 60^0$

Gọi H là hình chiếu của A lên A'M

$\Rightarrow AH = d(A,(A'BC)) = \frac{3a}{2}$

Trong tam giác vuông AHM ta có: $AM = \frac{AH}{\sin 60^0} = a\sqrt{3}$

Trong tam giác vuông AA'M ta có: $AA' = AM\tan 60^0 = 3a$

Vì $AM = \frac{AB\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AB = \frac{2AM}{\sqrt{3}} = 2a \Rightarrow S_{\Delta ABC} = a^2\sqrt{3}$

Vậy thể tích khối lăng trụ là: $V = AA'.S_{\Delta ABC} = 3a^3\sqrt{3}$.

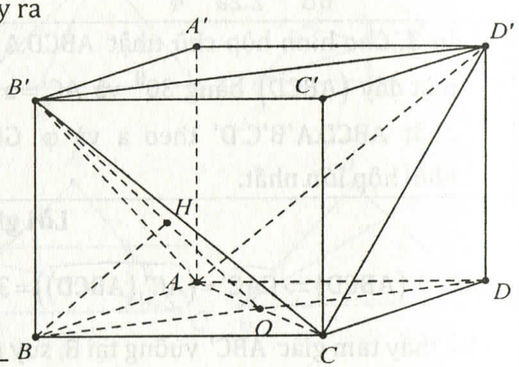
Ví dụ 2.

1. Cho lăng trụ đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy ABCD là hình thoi cạnh 2a. Mặt phẳng (B'AC) tạo với đáy một góc 30^0, khoảng cách từ B đến mặt phẳng $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB'} = \vec{0}$ bằng $\frac{a}{2}$. Tính thể tích khối tứ diện ACB'D'.

2. Cho khối lăng trụ ABC.A'B'C' có độ dài cạnh bên bằng 2a, đáy ABC là tam giác vuông tại A, $AB = a, AC = a\sqrt{3}$ và hình chiếu vuông góc của đỉnh A' trên mặt phẳng (ABC) là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích khối chóp A'.ABC và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.

Lời giải

1. Gọi O là giao của hai đường chéo AC và BD, ta có $AC \perp (B'OB) \Rightarrow \widehat{B'OB} = 30^0$



Gọi H là hình chiếu của B lên B'O, suy ra

$BH = d(B,(B'AC)) = d(B,(D'AC)) = \frac{a}{2}$

Do đó: $BO = \frac{BH}{\sin 30^0} = a$

$\Rightarrow OC = \sqrt{BC^2 - BO^2} = a\sqrt{3}$,

$BB' = BO\tan 30^0 = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{1}{2}AC.BD = 2BO.CO = 2a^2\sqrt{3}$

Nên $V_{ABCD.A'B'C'D'} = BB'.S_{ABCD} = \frac{a\sqrt{3}}{3}.2a^2\sqrt{3} = 2a^3$

Mặt khác $V_{B'ABC} = V_{D'ACD} = V_{CB'C'D'} = V_{AA'B'C'} = \frac{1}{6}V_{ABCD.A'B'CD'}$

Nên suy ra $V_{ACB'D'} = \frac{1}{3}V_{ABCD.A'B'C'D'} = \frac{2a^3}{3}$.

2. • Tính thể tích khối chóp A'.ABC.

Gọi H là trung điểm BC

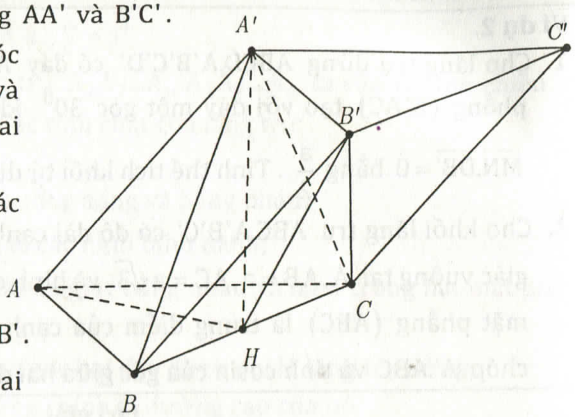
Theo bài ra ta có $A'H \perp (ABC)$

và $AH = \frac{1}{2}BC = \frac{1}{2}\sqrt{AC^2 + AB^2} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + 3a^2} = a$.

Do đó $A'H^2 = A'A^2 - AH^2 = 3a^2 \Rightarrow A'H = a\sqrt{3}$.

Vậy thể tích của khối chóp A'.ABC là $V_{A'.ABC} = \frac{1}{3}A'H.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3}{2}$.

Tính góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'.



Do AA' // BB', B'C' // BC nên góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C' cũng là góc giữa hai đường thẳng BB' và BC.

Áp dụng Pitago cho tam giác A'B'H, ta có:

$HB' = \sqrt{A'B'^2 + A'H^2} = 2a$.

Suy ra tam giác B'BH cân tại B'.

Do đó $\varphi = \widehat{B'BH}$ là góc giữa hai đường thẳng AA' và B'C'

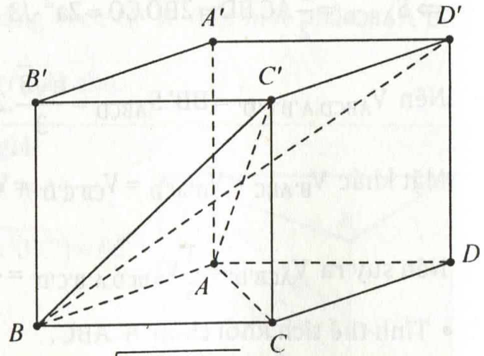
Vậy $\cos\varphi = \dfrac{BH}{BB'} = \dfrac{a}{2.2a} = \dfrac{1}{4}$.

Ví dụ 3. Cho hình hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D', góc giữa đường chéo AC' và mặt đáy $(ABCD)$ bằng 30^0 và $AC' = a$, $\widehat{AC'B} = \varphi$. Tính thể tích khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' theo a và φ. Giả sử a không đổi, tìm φ để thể tích khối hộp lớn nhất.

Lời giải

$CC' \perp (ABCD) \Rightarrow \widehat{CAC'} = \left(AC',(ABCD)\right) = 30^0$; $AC = AC'\cos 30^0 = \dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Dễ thấy tam giác ABC' vuông tại B, suy ra $AB = AC'\sin\varphi = a\sin\varphi$



Nên $BC = \sqrt{AC^2 - AB^2}$

$= \sqrt{\left(\dfrac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2 - a^2\sin^2\varphi} = \dfrac{a\sqrt{3-4\sin^2\varphi}}{2}$

và $CC' = \dfrac{AC'}{2} = \dfrac{a}{2}$.

Thể tích khối hộp chữ nhật ABCD.A'B'C'D' là :

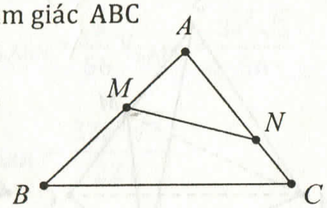
$$V = CC'.CB.AB = \frac{a}{2}\cdot\frac{a\sqrt{3-4\sin^2\varphi}}{2}a\sin\varphi = \frac{a^3\sin\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi}}{4}$$

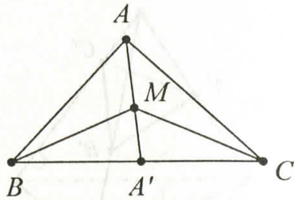
Ta có : $2\sin\varphi\sqrt{3-4\sin^2\varphi} \le \left(\dfrac{4\sin^2\varphi + 3 - 4\sin^2\varphi}{2}\right)^2 = \dfrac{9}{4}$. Nên suy ra $V \le \dfrac{9a^3}{32}$.

Vậy $\max V = \dfrac{9a^3}{32}$ khi $2\sin\varphi = \sqrt{3-4\sin^2\varphi}$ tức $\varphi = \text{acsin}\sqrt{\dfrac{3}{8}}$

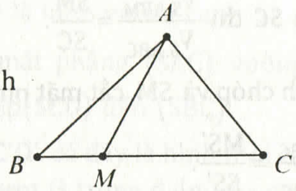
Dạng 3: Tỉ số thể tích

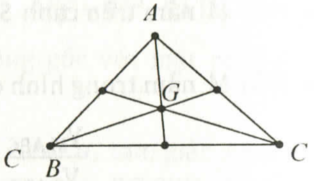
1. Tỉ số về diện tích: Cho tam giác ABC





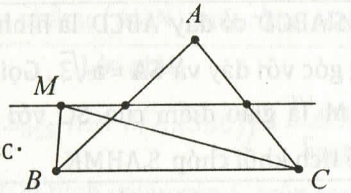
- Lấy các điểm M, N lần lượt trên các đường thẳng AB,AC thì $\dfrac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \dfrac{AM}{AB}.\dfrac{AN}{AC}$.
- Nếu điểm M nằm trong tam giác ABC, AM cắt BC tại A′ thì : $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{MA'}{MA}$.

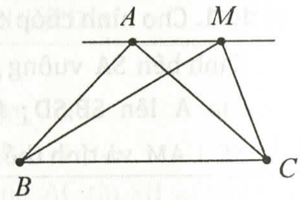




I Nếu điểm AD nằm trên cạnh BC của tam giác ABC, thì $\dfrac{S_{BAM}}{S_{BAC}} = \dfrac{BM}{BC}, \dfrac{S_{CAM}}{S_{CAB}} = \dfrac{CM}{CB}$.

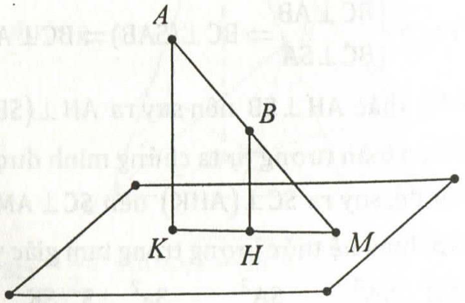
- Nếu G là trọng tâm tam giác ABC, thì $S_{GBC} = S_{GCA} = S_{GAB} = \dfrac{1}{3}S_{ABC}$.





- Nếu M nằm trên đường trung bình ứng với cạnh BC thì: $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \dfrac{1}{2}$.
- Nếu M nằm trên đường thẳng đi qua A và song song với BC thì: $\dfrac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = 1$

2. Tỉ số về khoảng cách

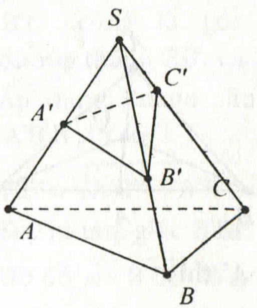


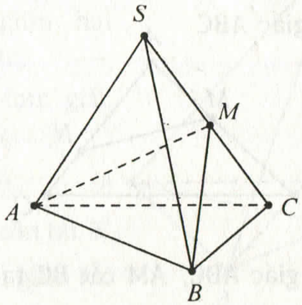
- Đường thẳng AB cắt mặt phẳng (P) ở điểm M thì: $\dfrac{d\left(A,(P)\right)}{d\left(B,(P)\right)} = \dfrac{AM}{BM}$.
- Đường thẳng Δ song song với một mặt phẳng (P) thì khoảng cách từ mọi điểm thuộc đường thẳng Δ đến mặt phẳng (P) bằng nhau.

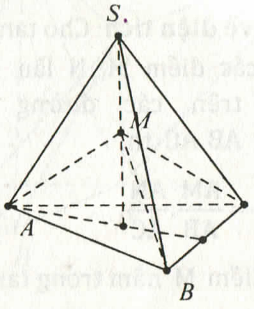
3. Tỉ số về thể tích: Cho khối chóp tam giác S.ABC.

- Trên ba đường thẳng SA,SB,SC lần lượt lấy ba điểm A′,B′,C′ bất kỳ.

Ta có $\frac{V_{S.A'B'C'}}{V_{S.ABC}}=\frac{SA'}{SA}.\frac{SB'}{SB}.\frac{SC'}{SC}$.





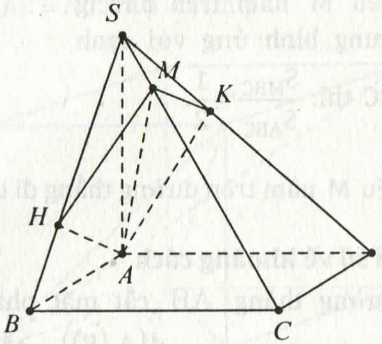


- Nếu M nằm trên cạnh SC thì $\frac{V_{S.ABM}}{V_{S.ABC}}=\frac{SM}{SC}$.
- Nếu M nằm trong hình chóp và SM cắt mặt phẳng (ABC) tại điểm S' thì

$$\frac{V_{M.ABC}}{V_{S.ABC}}=\frac{MS'}{SS'}.$$

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật $AB=a$, $AD=2a$. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA=a\sqrt{3}$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên SB,SD ; M là giao điểm của SC với (AHK). Chứng minh rằng $SC\perp AM$ và tính thể tích khối chóp S.AHMK .

Lời giải



Thể tích khối chóp S.ABCD :

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SA.S_{ABCD}=\frac{1}{3}SA.AB.AD=\frac{2a^3\sqrt{3}}{3}$$

Suy ra $V_{S.ABC}=V_{S.ACD}=\frac{1}{2}V_{S.ABCD}=\frac{a^3\sqrt{3}}{3}$.

Ta có $\begin{cases}BC\perp AB\\ BC\perp SA\end{cases}\Rightarrow BC\perp(SAB)\Rightarrow BC\perp AH$

Mặt khác $AH\perp SB$ nên suy ra $AH\perp(SBC)\Rightarrow AH\perp SC$

Hoàn toàn tương tự ta chứng minh được $AK\perp SC$.

Từ đó, suy ra $SC\perp(AHK)$ nên $SC\perp AM$.

Ap dụng hệ thức lượng trong tam giác vuông ta có:

$$\frac{SH}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{SA^2}{SA^2+AB^2}=\frac{3a^2}{4a^2}=\frac{3}{4};\ \frac{SK}{SD}=\frac{SA^2}{SA^2+AD^2}=\frac{3}{7};\ \frac{SM}{SC}=\frac{SA^2}{SA^2+AC^2}=\frac{3}{8}$$

Sử dụng công thức tỉ số thể tích ta có được:

$$\frac{V_{S.AHM}}{V_{S.ABC}}=\frac{SH}{SB}.\frac{SM}{SC}=\frac{9}{32}\Rightarrow V_{S.AHM}=\frac{9}{32}V_{S.ABC}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{32}$$

$$\frac{V_{S.AKM}}{V_{S.ADC}}=\frac{SK}{SD}.\frac{SM}{SC}=\frac{9}{56}\Rightarrow V_{S.AKM}=\frac{9}{56}V_{S.ABC}=\frac{3a^3\sqrt{3}}{56}$$

Vậy $V_{S.AHMK}=V_{S.AHM}+V_{S.AKM}=\frac{33a^3\sqrt{3}}{224}$.

Chú ý Ta có thể tính thể tích khối chóp S.AHMK theo cách sau $V_{S.AHMK}=\frac{1}{3}SM.S_{AHMK}$.

Ví dụ 2.

1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, $\widehat{ASC}=90^0$, SA lập với đáy góc α $(0^0<\alpha<90^0)$ và mặt phẳng (SAC) vuông góc với mặt phẳng (ABC). Tính khoảng cách từ mp(SCD) đến (SBC).
2. Cho hình hộp đứng ABCD.A'B'C'D' có đáy là hình thoi cạnh a, tam giác ABD là tam giác đều. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh BC,C'D' . Tính khoảng cách từ D đến mặt phẳng (AMN) biết rằng $MN\perp B'D$.

Lời giải

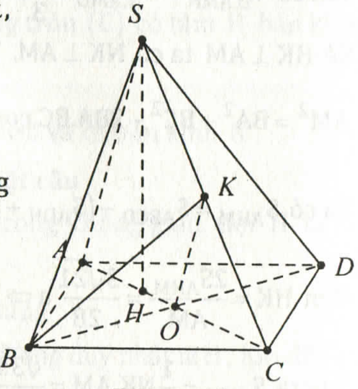
1. Ta có $V_{A.SBC}=\frac{1}{3}d\left(A,(SBC)\right).S_{BCS}$ nên $d\left(A,(SBC)\right)=\frac{3V_{A.SBC}}{S_{BCS}}$.

Vì $(SAC)\perp(ABC)$ nên gọi H là hình chiếu của S trên cạnh AC thì $SH\perp(ABC)$, hình chiếu của SA trên mặt phẳng (ABCD) là AH nên $\widehat{\left(SA,(ABCD)\right)}=\widehat{SAH}=\alpha$.

Ta có $\widehat{ASC}=90^0$ nên $SA=AC.\cos\alpha=\sqrt{2}.a.\cos\alpha$,

Do đó $SH=SA.\sin\alpha=\sqrt{2}.a.\cos\alpha\sin\alpha$

Nên $V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SH.S_{ABC}=\frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha$.



Gọi K là trung điểm của SC thì OK là đường trung bình của tam giác SAC

nên $OK\parallel SA\Rightarrow OK\perp SC$.

Mà $BD\perp(SAC)\Rightarrow BD\perp SC$ nên $BK\perp SC$.

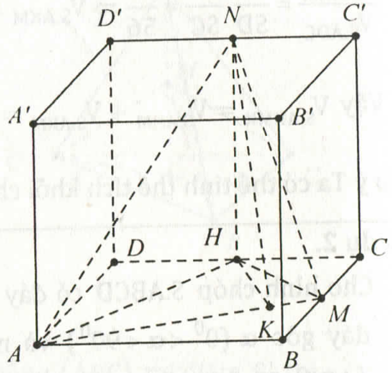
Ta có $SC=AC.\sin\alpha=\sqrt{2}.a.\sin\alpha$

nên $BK=\sqrt{BC^2-CK^2}=a\sqrt{\frac{2-\sin^2\alpha}{2}}\Rightarrow S_{BCS}=\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}$.

Vậy , $d\left[A,(SBC)\right]=\frac{3.\frac{\sqrt{2}}{6}.a^3.\cos\alpha\sin\alpha.}{\frac{1}{2}a^2\sin\alpha.\sqrt{2-\sin^2\alpha}}=\frac{\sqrt{2}.a.\cos\alpha}{\sqrt{2-\sin^2\alpha}}$.

2. Đặt $\overrightarrow{AA'} = \vec{x}, \overrightarrow{AB} = \vec{y}, \overrightarrow{AD} = \vec{z}$.

Ta có tam giác ABD là tam giác đều nên : $\vec{x}.\vec{y} = \vec{x}.\vec{z} = 0, \vec{y}.\vec{z} = |\vec{y}||\vec{z}|.\cos 60^0 = \frac{a^2}{2}$.



Ta có $\overrightarrow{DB'} = \overrightarrow{DD'} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DA} = \vec{x} + \vec{y} - \vec{z}$.

Vì M,N là trung điểm của BC,C'D'

nên $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{C'N}$ hay

$\overrightarrow{MN} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'D'} = \frac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}$.

Vì $MN \perp B'D$ nên $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{DB'} = \vec{0}$

Do đó $(\vec{x} + \vec{y} - \vec{z})\left(\frac{1}{2}\vec{z} + \vec{x} - \frac{1}{2}\vec{y}\right) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} - \frac{1}{2}.a^2 - \frac{1}{2}.a^2 + \frac{1}{2}.\frac{a^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{2}}{2}a$.

Ta có: $d(D,(AMN)) = \frac{3V_{D.AMN}}{S_{AMN}}$.

Ta thấy $S_{AMD} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = S_{ABD} = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.

Gọi H là trung điểm của CD thì $NH \perp (ABCD), NH = \frac{\sqrt{2}}{2}a$

nên có $V_{D.AMN} = V_{N.AMD} = \frac{1}{3}NH.S_{AMD} = \frac{\sqrt{6}}{24}a^3$.

Kẻ $HK \perp AM$ ta có $NK \perp AM$. Theo định lí hàm số cosin

$AM^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA.BC.\cos 120^0 = \frac{7}{4}a^2 \Rightarrow AM = \frac{\sqrt{7}}{2}a$.

Ta có $S_{AHM} = S_{ABCD} - (S_{ADH} + S_{CHM} + S_{ABM}) = \frac{3}{8}S_{ABCD} = \frac{3\sqrt{3}}{16}a^2$

Nên $HK = \frac{2S_{AHM}}{AM} = \frac{3\sqrt{21}}{28}a \Rightarrow NK = \sqrt{NH^2 + HK^2} = \frac{\sqrt{231}}{14}a$.

Suy ra $S_{AMN} = \frac{1}{2}NK.AM = \frac{\sqrt{33}}{8}a^2$, do đó $d(D,(AMN)) = \frac{\sqrt{22}}{11}a$.

Vậy khoảng cách từ điểm D đến mặt phẳng (AMN) là $\frac{\sqrt{22}}{11}a$.

Dạng 4: Mặt cầu

I. Khái niệm mặt cầu.

- Mặt cầu tâm O bán kính R (ta kí hiệu $S(O,R)$) là tập hợp các điểm M trong không gian thỏa mãn $S(O,R) = \{M \mid OM = R\}$.
- Nếu AB là đường kính mặt cầu $S(O,R)$ thì với mọi điểm M thuộc mặt cầu (trừ A và B) thì $\widehat{AMB} = 90^0$.
- Ngược lại với mọi điểm M nằm trong không gian thỏa mãn $\widehat{AMB} = 90^0$ thì điểm M thuộc mặt cầu đường kính AB.

II. Vị trí tương đối của một điểm với mặt cầu.

Cho mặt cầu $S(O,R)$ và một điểm A bất kì trong không gian.

- Nếu $OA > R$ thì A ở ngoài mặt cầu
- Nếu $OA = R$ thì A ở trên mặt cầu
- Nếu $OA < R$ thì A ở trong mặt cầu

III. Vị trí tương đối của một hình phẳng với mặt cầu.

Cho mặt cầu $S(O,R)$ và một mặt phẳng (P) bất kì trong không gian.

Gọi H là hình chiếu của O lên (P).

- Nếu $OH > R$ thì (P) không cắt mặt cầu
- Nếu $OH = R$ thì (P) và (S) có một điểm chúng duy nhất là H.

  Khi đó ta nói: (P) tiếp xúc với mặt cầu và (P) gọi là mặt phẳng tiếp diện, H gọi là tiếp điểm.
- Nếu $OH < R$ thì (P) cắt mặt cầu theo một đường tròn (C) có tâm H bán kính

$$r = \sqrt{R^2 - OH^2}.$$

Nếu O nằm trên (P) thì (C) gọi là đường tròn lớn và có bán kính R.

IV. Vị trí tương đối của một đường thẳng với mặt cầu

Cho mặt cầu $S(O,R)$ và một đường d bất kì trong không gian. Gọi H là hình chiếu của O lên d.

- Nếu $OH > R$ thì d và mặt cầu không có điểm chung.
- Nếu $OH = R$ thì d và mặt cầu (S) có một điểm chung duy nhất là H. Khi đó ta nói d tiếp xúc với mặt cầu và d gọi là tiếp tuyến cầu mặt cầu, H gọi là tiếp điểm.
- Nếu $OH < R$ thì d và mặt cầu có đúng hai điểm chung.

  Khi đó ta nói d cắt mặt cầu tại hai điểm phân biệt.

V. Mặt cầu ngoại tiếp và hình cầu nội tiếp hình đa diện.

- Mặt cầu ngoại tiếp hình đa diện là mặt cầu đi qua tất cả các đỉnh của hình đa diện
- Mặt cầu nội tiếp hình đa diện là mặt cầu tiếp xúc với tất cả các mặt của hình đa diện.

Nhận xét.

- Một đa diện có mặt cầu ngoại tiếp thì tất cả các mặt của đa diện đều có đường tròn ngoại tiếp.
- Nếu tâm mặt cầu ngoại tiếp của đa diện thuộc một mặt của đa diện thì đường tròn ngoại tiếp của đa diện đó là đường tròn lớn.
- Khoảng cách từ tâm mặt cầu nội tiếp của đa diện đến các mặt đa diện bằng nhau và bằng bán kính mặt cầu nội tiếp đa diện đó.

VI. Diện tích mặt cầu và thể tích khối cầu.

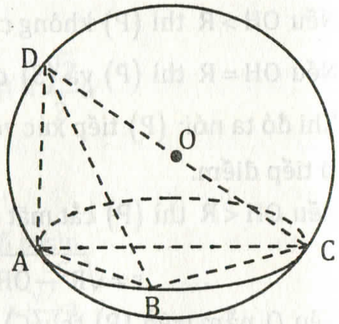
Diện tích hình cầu bán kính R : $S = 4\pi R^2$.

Thể tích khối cầu bán kính R : $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.

Ví dụ.

1. Cho tam giác ABC vuông tại B, $DA \perp (ABC)$, $AB = 3a$, $BC = 4a$, $AD = 5a$. Chứng minh rằng 4 điểm A, B, C, D cùng nằm trên 1 mặt cầu. Xác định tâm và bán kính mặt cầu đó.
2. Cho hình chóp đều $S.ABC$ có cạnh đáy $AB = a$, cạnh bên hợp với mặt đáy một góc bằng 60^0. Xác định tâm và bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp $S.ABC$.

Lời giải



1. * Ta có: $DA \perp (ABC) \Rightarrow DA \perp BC$ và $AB \perp BC$ suy ra $BC \perp BD$

* Khi đó $\widehat{DAC} = \widehat{DBC} = 90^0$. Gọi O là trung điểm CD thì: $OA = OB = OC = OD$

* Vậy, A, B, C, D nằm trên mặt cầu tâm O là trung điểm CD, bán kính bằng $\frac{CD}{2}$.

Khi đó: $R = OA = OB = OC = OD \Rightarrow OA = \frac{1}{2}CD = \frac{1}{2}\sqrt{AD^2 + AC^2}$

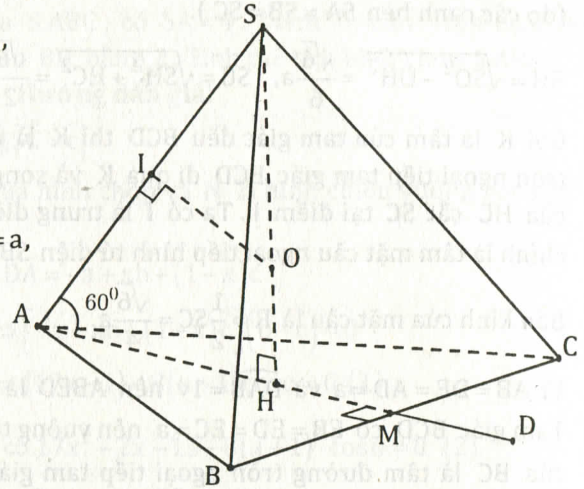
hay $OA = \sqrt{25a^2 + 16a^2 + 9a^2} = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$. Vậy, $R = \frac{5a\sqrt{2}}{2}$

2. Gọi H là hình chiếu của S lên mặt phẳng (ABC), ta có H là tâm của ΔABC. Nên SH là trục đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Trong ΔSAH dựng đường trung trực Ix của cạnh SA. Gọi $O = Ix \cap SH$.

$$\begin{cases} O \in SH \\ O \in Ix \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} OA = OB = OC \\ OS = OA \end{cases} \Rightarrow O \text{ là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp } S.ABC.$$

Bán kính $R = SO$. Để tính bán kính R ta có thể thực hiện theo hai cách sau.

Cách 1.



Ta có $\widehat{SAH} = \widehat{(SA,(ABC))} = 60^0$,

$AH = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}.\frac{\sqrt{3}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a}{3}$

(M là trung điểm cạnh BC).

$\Rightarrow SH = AH\tan 60^0 = \frac{\sqrt{3}a}{3}.\sqrt{3} = a$,

$SA = \frac{AH}{\cos 60^0} = \frac{2\sqrt{3}a}{3}$

Do $\Delta SIO \backsim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SI}{SH} = \frac{SO}{SA}$

$\Rightarrow SO = \frac{SA.SI}{SH} = \frac{SA^2}{2SH} = \frac{2a}{3}$.

Vậy bán kính hình cầu ngoại tiếp hình chóp là $R = \frac{2a}{3}$.

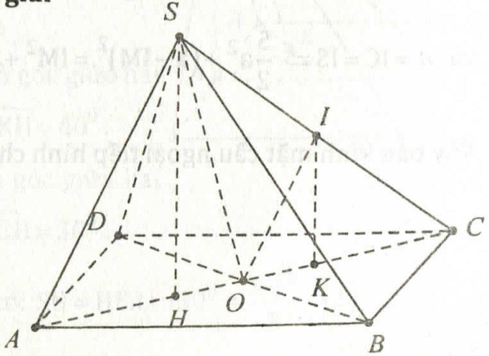
Cách 2. Gọi D là giao điểm của AH với mặt cầu, tâm O thuộc mp (SAD) nên đường tròn ngoại tiếp ΔSAD là đường tròn lớn.

Dễ thấy ΔSAD là tam giác đều nên bán kính $R = \frac{\sqrt{3}SA}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}.\frac{2\sqrt{3}a}{3} = \frac{2a}{3}$.

Ví dụ 2.

1. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy $ABCD$ là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$ và các cạnh bên $SA = SB = SC$. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện $SBCD$ biết $\widehat{BSD} = 90^0$.
2. Cho hình chóp $S.ABCD$ có đáy là hình thang vuông tại A,D, $AB = AD = a, CD = 2a$. Cạnh bên $SD \perp (ABCD)$ và $SD = a$. Gọi E là trung điểm của DC. Xác định tâm và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp $S.BCE$.

Lời giải



1. Gọi O là giao điểm hai đường chéo của hình thoi $ABCD$.

Theo bài ra ta có, $BD = a$.

Mà tam giác ΔSBD vuông tại S nên

$SB = SD = \frac{\sqrt{2}}{2}a, SO = \frac{a}{2}$.

Gọi H là hình chiếu của S trên mặt phẳng đáy thì H là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABD

(do các cạnh bên $SA = SB = SC$).

$$SH = \sqrt{SO^2 - OH^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}a,\quad SC = \sqrt{SH^2 + HC^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

Gọi K là tâm của tam giác đều BCD thì K là trung điểm của HC, trục đường tròn ngoại tiếp tam giác BCD đi qua K và song song với SH nên là trung trực của HC cắt SC tại điểm I. Ta có I là trung điểm của SC nên $IS = IC$, do đó I chính là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình tứ diện SBCD.

Bán kính của mặt cầu là $R = \frac{1}{2}SC = \frac{\sqrt{6}}{4}a.$

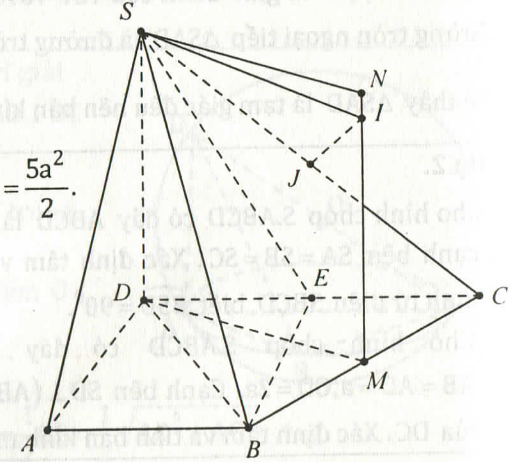
2. Vì $AB = DE = AD = a$ và $\widehat{DAB} = 1v$ nên ABED là hình vuông.

Tam giác BCD có $EB = ED = EC = a$ nên vuông tại B, $BE \perp CD$ nên trung điểm M của BC là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC. Dựng Δ là trục đường tròn ngoại tiếp tam giác EBC thì Δ song song với SD.

Dựng mặt phẳng trung trực cạnh SC, mặt phẳng đó cắt Δ tại I.

Điểm I là tâm mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE.

Kẻ SN//DM cắt MI tại N, ta có SDMN là hình chữ nhật với $SD = a$ và



$$DM^2 = \frac{DB^2 + DC^2}{2} - \frac{BC^2}{4}$$

$$= \frac{AB^2 + AD^2 + DC^2}{2} - \frac{EC^2 + EB^2}{4} = \frac{5a^2}{2}.$$

Ta có:

$$SI^2 = SN^2 + NI^2 = SN^2 + (NM - IM)^2$$

$$= \frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2$$

Mà $IC^2 = IM^2 + MC^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2}$

và $R = IC = IS \Rightarrow \frac{5}{2}a^2 + (a - IM)^2 = IM^2 + \frac{a^2}{2} \Leftrightarrow IM = \frac{3}{2}a$

Vậy bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình chóp S.BCE là $R = \sqrt{IM^2 + \frac{a^2}{2}} = \frac{\sqrt{11}}{2}a.$

Bài tập tự luyện

1. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC, có $SA = 4$. Điểm D nằm trên cạnh SC, $CD = 3$. Khoảng cách từ A đến BD bằng 2. Tính thể tích hình chóp S.ABC.

Hướng dẫn giải

Chọn hệ vectơ $\left\{\overrightarrow{SA} = \vec{a}, \overrightarrow{SB} = \vec{b}, \overrightarrow{SC} = \vec{c}\right\}$

Gọi φ là góc phẳng ở đỉnh của hình chóp và N là hình chiếu vuông góc của A lên đường thẳng BD.

Ta có: $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{DN} - \overrightarrow{DA} = x\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA} = -\vec{a} + x\vec{b} + (1 - x)\vec{c}$

Vì $AN \perp BD$ nên $\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{DB} = 0 \Leftrightarrow \left[-\vec{a} + x\vec{b} + (1 - x)\vec{c}\right]\left(\vec{b} - \vec{c}\right) = 0$

$$\Leftrightarrow (17x - 1) - 8(x + 1)\cos\varphi = 0\ (1)$$

Hơn nữa $AN = 2 \Leftrightarrow \left|\overrightarrow{AN}\right|^2 = 4 \Leftrightarrow 17x^2 - 2x + 13 - 8(x + 1)^2\cos\varphi = 0$ (2)

Từ (1) và (2) ta tìm được $x = \frac{7}{9}$, $\cos\varphi = \frac{55}{64}$.

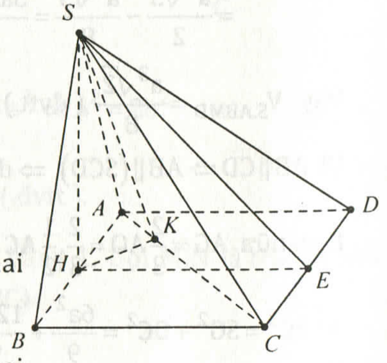
Gọi O là trọng tâm tam giác ABC, ta luôn có: $\overrightarrow{SO} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{SA} + \overrightarrow{SB} + \overrightarrow{SC}\right) = \frac{1}{3}\left(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}\right)$

$$\Rightarrow \left|\overrightarrow{SO}\right| = \frac{1}{3}\sqrt{\left(\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}\right)^2} = \frac{1}{3}\sqrt{48 + 96\cos\varphi} = \frac{1}{2}\sqrt{58},\ \left|\overrightarrow{AB}\right|^2 = \left|\vec{b} - \vec{a}\right|^2 = \frac{9}{2}$$

Vậy, $V_{S.ABC} = \frac{1}{3}\frac{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\sqrt{3}}{4}.\left|\overrightarrow{SO}\right| = \frac{3\sqrt{174}}{16}$ (đvtt).

2. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, tam giác SAB là tam giác đều cạnh a và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Mặt phẳng (SAC) và (SCD) tạo với đáy lần lượt các góc 60^0 và 30^0. Tính thể tích khối chóp S.ABCD.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của $AB \Rightarrow SH \perp AB$

Mà $(SAB) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow V_{S.ABCD} = \frac{1}{3}SH.S_{ABCD}$

Vẽ $HK \perp AC \Rightarrow AC \perp (SHK) \Rightarrow \widehat{SKH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SAC) và mặt đáy nên $\widehat{SKH} = 60^0$.

Vẽ $HE \perp CD \Rightarrow CD \perp (SHE) \Rightarrow \widehat{SEH}$ là góc giữa hai mặt phẳng (SCD) và mặt đáy nên $\widehat{SEH} = 30^0$.

Đặt $AB = x$, trong tam giác SHE ta có: $SH = HE.\tan30^0 = \frac{x\sqrt{3}}{3}$ (1)

Ta có $\Delta AKH \backsim \Delta ABC \Rightarrow \frac{KH}{BC} = \frac{AH}{AC} \Rightarrow KH = \frac{ax}{2\sqrt{a^2+x^2}}$

Trong tam giác SHK ta có: $SH = HK\tan 60^0 = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+x^2}}$ (2)

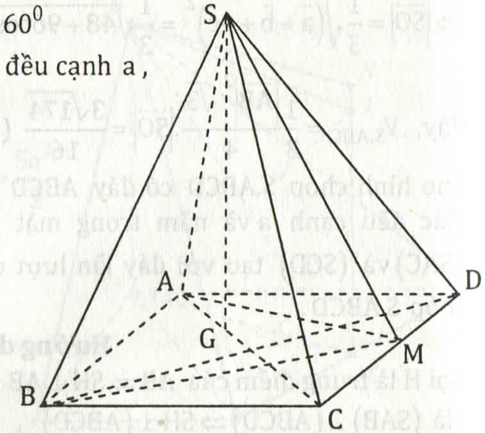
Từ (1) và (2), suy ra: $\frac{x\sqrt{3}}{3} = \frac{ax\sqrt{3}}{2\sqrt{a^2+x^2}} \Leftrightarrow \sqrt{x^2+a^2} = \frac{3a}{2} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

Vậy thể tích khối chóp S.ABCD là: $V = \frac{1}{3}SH.AB.AD = \frac{1}{3}.\frac{x\sqrt{3}}{3}.a.x = \frac{5a^3\sqrt{3}}{36}$.

3. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$, G là trọng tâm ΔABD và $SG \perp (ABCD)$, $SG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$. Gọi M là trung điểm CD. Tính thể tích khối chóp S.ABMD; khoảng cách giữa AB và SM theo a.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy, SG là đường cao của khối chóp S.ABMD và $SG = \frac{a\sqrt{6}}{3}$.



Vì ABCD là hình thoi cạnh a, $\widehat{BAD} = 60^0$ nên ΔABD và ΔBCD là các tam giác đều cạnh a, M là trung điểm CD

$\Rightarrow S_{\Delta BCM} = \frac{1}{2}S_{\Delta BCD} = \frac{1}{2}\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{8}$

$\Rightarrow S_{ABMD} = S_{ABCD} - S_{\Delta BCM}$

$= \frac{a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{a^2\sqrt{3}}{8} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{8}$.

Vậy, $V_{S.ABMD} = \frac{a^3\sqrt{2}}{8}$ (đvtt).

Vì $AB \parallel CD \Rightarrow AB \parallel (SCD) \Rightarrow d(AB,SM) = d\left[AB,(SCD)\right] = d\left[B,(SCD)\right] = h$

Hơn nữa $AG = \frac{2}{3}AO = \frac{2}{3}.\frac{1}{2}AC = \frac{1}{3}AC = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow GC = \frac{2a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow SC^2 = SG^2 + GC^2 = \frac{6a^2}{9} + \frac{12a^2}{9} = 2a^2$

Lại có: $GD = GA = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow SD^2 = SG^2 + GD^2 = \frac{6a^2}{9} + \frac{3a^2}{9} = a^2$

Suy ra $\cos\widehat{SCD} = \frac{SC^2+CD^2-SD^2}{2.SC.CD} = \frac{2a^2+a^2-a^2}{2.a\sqrt{2}.a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \widehat{SCD} = 45^0$

Khi đó: $S_{\Delta SCM} = \frac{1}{2}SC.CM.\sin 45^0 = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.\frac{a}{2}.\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}$ (đvdt)

Mặt khác: $V_{S.BCM} = V_{B.SCM} = \frac{1}{3}.h.S_{\Delta SCM}$ suy ra $h = \frac{3V_{B.SCM}}{S_{\Delta SCM}}$

$$V_{B.SCM} = V_{S.BCM} = V_{S.ABCD} - V_{S.ABMD} = \frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{6}}{3}.\frac{a^2\sqrt{3}}{2} - \frac{a^3\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{6} - \frac{a^3\sqrt{2}}{8} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$$

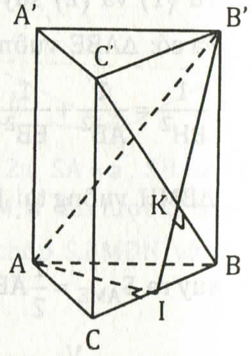
Suy ra $h = \frac{\frac{3.a^3\sqrt{2}}{24}}{\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$. Vậy, $d(AB,SM) = \frac{a\sqrt{2}}{2}$

4. Cho lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có chiều cao bằng h và 2 đường thẳng AB', BC' vuông góc với nhau. Tính thể tích lăng trụ theo h.

Hướng dẫn giải

Gọi a là độ dài cạnh tam giác đều ABC, I là trung điểm BC.

$\Rightarrow AI \perp BC,\ CI = IB = \frac{a}{2}$.



* Ta có: $AI \perp BC,\ AI \perp BB'$ (vì $BB' \perp (ABC)$)

$\Rightarrow AI \perp (BB'C'C) \Rightarrow AI \perp BC'$

* Hơn nữa: $BC' \perp AB' \Rightarrow BC' \perp (AIB') \Rightarrow BC' \perp IB'$ tại K

* $\Delta BB'I$ vuông, có: $IB'^2 = BB'^2 + IB^2 = h^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{1}{4}(4h^2+a^2)$

* $IB \parallel B'C' \Rightarrow \frac{IK}{KB'} = \frac{IB}{B'C'} = \frac{1}{2} \Rightarrow B'K = \frac{2}{3}IB'$

* $\Delta BB'I$ vuông có đường cao BK: $BB'^2 = B'K.B'I$

$\Leftrightarrow h^2 = \frac{2}{3}.IB'.IB^2 = \frac{2}{3}.\frac{1}{4}(4h^2+a^2) \Leftrightarrow 6h^2 = 4h^2 + a^2 \Leftrightarrow a^2 = 2h^2$

* $V_{ABC.A'B'C'} = h.S_{ABC} = h.\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = h.\frac{2h^2\sqrt{3}}{4} = \frac{h^3\sqrt{3}}{2}$ (đvtt).

5. Cho hình chóp tam giác đều S.ABC có cạnh đáy bằng 1. Gọi M,N là trung điểm SB,SC. Tính diện tích ΔAMN, biết $(AMN) \perp (SBC)$.

Hướng dẫn giải

Gọi K là trung điểm BC và I là trung điểm MN, O là trọng tâm ΔABC.

Ta có: ΔAMN cân tại A nên $AI \perp MN$ và giả thiết $(AMN) \perp (SBC)$ suy ra

$AI \perp (SBC) \Rightarrow AI \perp SI$

Hơn nữa $MN \perp SI$ suy ra $SI \perp (AMN)$

Lại có: $\frac{V_{S.AMN}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC} = \frac{1}{4}$ hay $\frac{SI.S_{AMN}}{SO.S_{ABC}} = \frac{1}{4} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{4}\frac{SO}{SI}S_{ABC}$

Ta thấy, ΔASK cân tại A nên $AK = AS = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow SO = \frac{\sqrt{15}}{6}$.

$$SI = \frac{1}{2}SK = \frac{\sqrt{2}}{4} \Rightarrow S_{AMN} = \frac{1}{4}.\frac{SO}{SI}.\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{10}}{16} \text{ (đvdt)}$$

6. Cho lăng trụ đứng ABC.A'B'C' có đáy ABC là tam giác vuông, $AB = BC = a$, cạnh bên $AA' = a\sqrt{2}$. Gọi M là trung điểm của cạnh BC. Tính theo a thể tích của khối lăng trụ ABC.A'B'C' và khoảng cách giữa hai đường thẳng AM, B'C.

Hướng dẫn giải

Gọi E là trung điểm của BB', ta có: $ME \parallel B'C \Rightarrow B'C \parallel (AME)$

Suy ra $d(B'C, AM) = d[B'C,(AME)] = d[C,(AME)]$

Gọi H là hình chiếu vuông góc của B lên $AE \Rightarrow BH \perp AE$ (1)

Hơn nữa $BM \perp (ABE) \Rightarrow BM \perp AE$ (2)

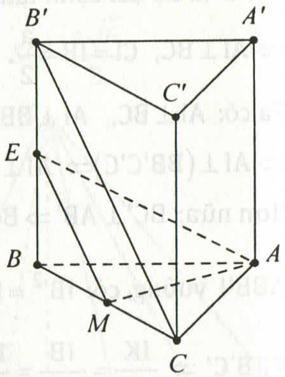
Từ (1) và (2) suy ra $AE \perp (BMH) \Rightarrow AE \perp MH$

Ta có: ΔABE vuông tại B, nên

$$\frac{1}{BH^2} = \frac{1}{AB^2} + \frac{1}{EB^2} = \frac{3}{a^2} \Rightarrow BH = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

ΔBMH vuông tại B, nên $MH = \frac{a\sqrt{21}}{6}$

suy ra $S_{AME} = \frac{1}{2}AE.HM = \frac{a^2\sqrt{14}}{8}$



Mặt khác: $\frac{V_{C.AEM}}{V_{C.AEB}} = \frac{MC}{BC} = \frac{1}{2} \Rightarrow V_{C.AEM} = \frac{1}{2}V_{C.AEB} = \frac{a^3\sqrt{2}}{24}$

Và $V_{C.AEM} = \frac{1}{3}S_{AEM}.d[C,(AME)] \Rightarrow d[C,(AME)] = \frac{a\sqrt{7}}{7}$

7. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh *a*, cạnh bên $SA = a$; hình chiếu vuông góc của đỉnh S trên mặt phẳng (ABCD) là điểm H thuộc đoạn AC, $AH = \frac{AC}{4}$. Gọi CM là đường cao của tam giác SAC. Chứng minh M là trung điểm của SA và tính thể tích khối tứ diện SMBC theo a.

Hướng dẫn giải

Cách 1:

- Chứng minh M là trung điểm SA

Ta có: $AH = \frac{a\sqrt{2}}{4} \Rightarrow SH = \sqrt{SA^2 - AH^2} = \frac{a\sqrt{14}}{4}$, $HC = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$

$\Rightarrow SC = \sqrt{SH^2 + CH^2} = a\sqrt{2}$.

Suy ra $SC = AC \Rightarrow \Delta ACS$ cân tại C nên M là trung điểm SA.

- Tính $V_{S.MBC}$

Vì M là trung điểm SC nên $S_{SCM} = \frac{1}{2}S_{SAC}$, suy ra

$$V_{SMBC} = \frac{1}{2}V_{SABC} = \frac{1}{6}SH.S_{\Delta ABC} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}.$$

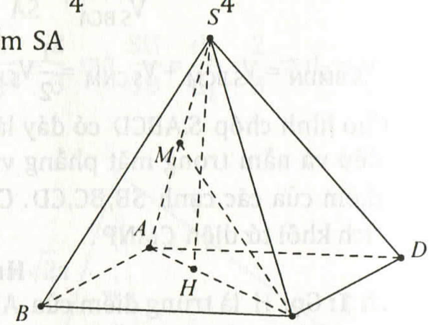
Cách 2: Từ giả thiết ta suy ra: $AH = \frac{a\sqrt{2}}{4}$, $SH = \frac{a\sqrt{14}}{4}$, $CH = \frac{3a\sqrt{2}}{4}$, $SC = a\sqrt{2}$.

Tam giác SAC cân tại C nên M là trung điểm SA

Ta có: $\frac{V_{S.MBC}}{V_{S.ABC}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow V_{S.MBC} = \frac{1}{2}V_{S.ABC} = \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.SH.S_{ABC}$

$= \frac{1}{6}.\frac{a^2}{2}.\frac{a\sqrt{14}}{4} = \frac{a^3\sqrt{14}}{48}$ (đvtt)



8. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình vuông cạnh 2a, $SA = a$, $SB = a\sqrt{3}$ và mặt phẳng (SAB) vuông góc với mặt phẳng đáy. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh AB, BC. Tính theo a thể tích của khối chóp S.BMDN và tính cosin của góc giữa hai đường thẳng SM, DN.

Hướng dẫn giải

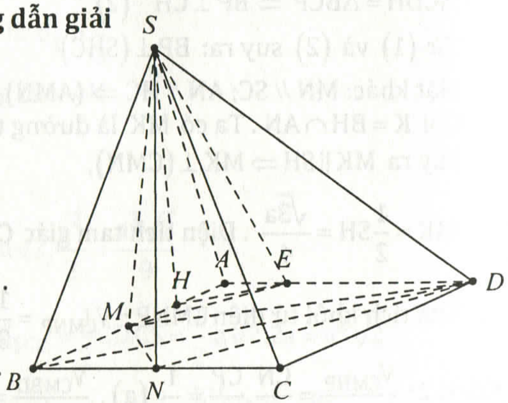
Cách 1: Gọi H là hình chiếu của S trên AB, suy ra $SH \perp (ABCD)$.

Do đó SH là đường cao của hình chóp S.BMDN.

Ta có: $SA^2 + SB^2 = a^2 + 3a^2 = AB^2$

$\Rightarrow \Delta SAB$ vuông tại S $\Rightarrow SM = \frac{AB}{2} = a$.

Do đó tam giác đều, suy ra $SH = \frac{a\sqrt{3}}{2}$.



Diện tích tứ giác BMDN là: $S_{BMDN} = \frac{1}{2}S_{ABCD} = 2a^2$.

Thể tích khối chóp S.BMDN: $V = \frac{1}{3}SH.S_{BMDN} = \frac{a^3\sqrt{3}}{3}$ (đvtt).

Kẻ $ME \parallel DN \ (E \in AD) \Rightarrow AE = \frac{a}{2}$.

Đặt φ là góc giữa hai đường thẳng SM và DN. Ta có: $\widehat{(SM, ME)} = \varphi$.

Theo định lý ba đường vuông góc, ta có: $SA \perp AE$

$\Rightarrow SE = \sqrt{SA^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$, $ME = \sqrt{AM^2 + AE^2} = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

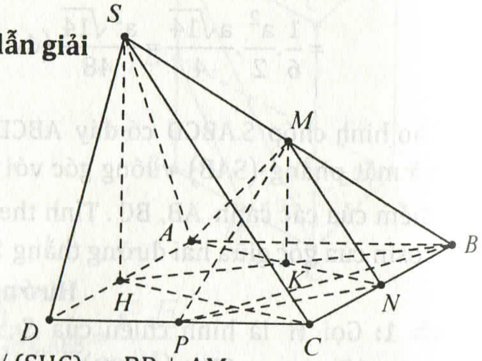
Do ΔSME cân tại E nên $\widehat{SME} = \varphi$ và $\cos\varphi = \dfrac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$.

Cách 2: Tính thể tích: $\frac{V_{S.BCM}}{V_{S.BCA}} = \frac{SM}{SA} = \frac{1}{2}$, $\frac{V_{S.CMN}}{V_{S.CAD}} = \frac{SM}{SA} \cdot \frac{SN}{SD} = \frac{1}{4}$

$V_{S.BMDN} = V_{S.BCM} + V_{S.CNM} = \frac{1}{2} V_{S.BCA} + \frac{1}{4} V_{S.CAD}$

9. Cho hình chóp S.ABCD có đáy là hình vuông cạnh a, mặt bên SAD là tam giác đều và nằm trong mặt phẳng vuông góc với đáy. Gọi M,N,P lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,BC,CD. Chứng minh AM vuông góc với BP và tính thể tích khối tứ diện CMNP.

Hướng dẫn giải



Cách 1: Gọi H là trung điểm của AD.

Ta có tam giác SAD đều nên $SH \perp AD$.

Do $(SAD) \perp (ABCD) \Rightarrow SH \perp (ABCD)$

$\Rightarrow SH \perp BP$ (1)

Ta có ABCD là hình vuông nên:

$\Delta CDH = \Delta BCP \Rightarrow BP \perp CH$ (2).

Từ (1) và (2) suy ra: $BP \perp (SHC)$

Mặt khác: $MN \parallel SC$; $AN \parallel HC \Rightarrow (AMN) \parallel (SHC) \Rightarrow BP \perp AM$

Gọi $K = BH \cap AN$. Ta có MK là đường trung bình của tam giác SBH

Suy ra $MK \parallel SH \Rightarrow MK \perp (CMN)$,

$MK = \frac{1}{2} SH = \frac{\sqrt{3}a}{4}$. Diện tích tam giác CMN: $S_{CMN} = \frac{1}{2} CM.CN = \frac{a^2}{8}$.

Thể tích khối tứ diện CMNP: $V_{CMNP} = \frac{1}{3} MK.S_{CMN} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$ (đvtt).

Cách 2: $\frac{V_{CMNP}}{V_{CMPD}} = \frac{CN}{CB} \cdot \frac{CP}{CD} = \frac{1}{4}$ (a), $\frac{V_{CMBD}}{V_{CSBD}} = \frac{V_{M.CBD}}{V_{S.CBD}} = \frac{BM}{BS} = \frac{1}{2}$ (b)

Lấy (a)x(b), ta được $\frac{V_{CMNP}}{V_{S.BCD}} = \frac{1}{8} \Rightarrow V_{CMNP} = \frac{1}{8} V_{S.BCD}$

Gọi H là trung điểm $AD \Rightarrow SH \perp AD$ và $(SAD) \perp (ABCD)$ nên $SH \perp (ABCD)$

Cho nên, $V_{S.BCD} = \frac{1}{3} SH.S_{BCD} = \frac{a^3\sqrt{3}}{12}$, do đó $V_{CMNP} = \frac{\sqrt{3}a^3}{96}$

10. Cho hình chóp S.ABCD đáy là hình thang, $\widehat{ABC} = \widehat{BAD} = 90^0$, BA = BC = a, AD = 2a. Cạnh bên SA vuông góc với đáy và $SA = a\sqrt{2}$. Gọi H là hình chiếu của A lên SB. Chứng minh tam giác SCD vuông và tính (theo a) khoảng cách từ H đến mp(SCD)

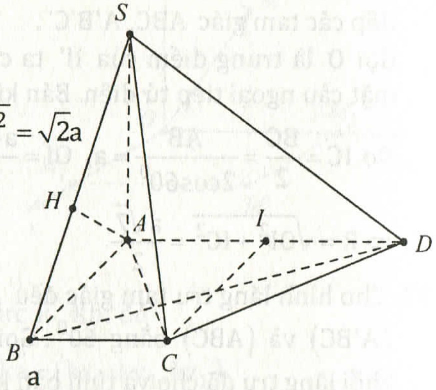
Hướng dẫn giải

Cách 1: Gọi I là trung điểm của AD. Ta có $CI = IA = ID = \frac{AD}{2}$ suy ra ΔACD vuông tại $C \Rightarrow CD \perp AC$. Mà $SA \perp (ABCD) \Rightarrow SA \perp CD$ nên ta có $CD \perp SD$ hay ΔSCD vuông

Gọi $d_1; d_2$ lần lượt là khoảng cách từ B,H đến mp(SCD)

Ta có: $\Delta SAB \backsim \Delta SHA \Rightarrow \frac{SA}{SH} = \frac{SB}{SA} \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{SA^2}{SB^2} = \frac{2}{3}$ mà $\frac{SH}{SB} = \frac{d_2}{d_1} = \frac{2}{3} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{3} d_1$.

Thể tích khối tứ diện S.BCD:



$V_{SBCD} = \frac{1}{3} SA.\frac{1}{2} AB.BC = \frac{\sqrt{2}a^3}{6}$

Ta có: $SC = \sqrt{SA^2 + AC^2} = 2a$, $CD = \sqrt{CI^2 + ID^2} = \sqrt{2}a$

$\Rightarrow S_{SCD} = \frac{1}{2} SC.CD = \sqrt{2}a^2$.

$V_{SBCD} = \frac{1}{3} d_1.S_{SCD} \Rightarrow d_1 = \dfrac{3.\frac{\sqrt{2}a^3}{6}}{\sqrt{2}a^2} = \frac{a}{2}$

Vậy khoảng cách từ H đến mp(SCD) là $d_1 = \frac{a}{3}$

Cách 2: Ta có: ΔSAB vuông tại A, đường cao AH

nên $\frac{SH}{HB} = \frac{SA^2}{AB^2} = \frac{2a^2}{a^2} = 2 \Rightarrow \frac{SH}{SB} = \frac{2}{3}$

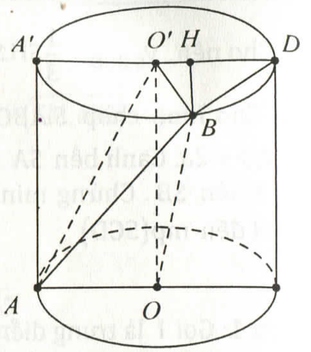
$\frac{V_{S.HCD}}{V_{S.BCD}} = \frac{SH}{SB} \Rightarrow V_{S.HCD} = \frac{2}{3} V_{S.BCD} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{a^3\sqrt{2}}{9}$

Mặt khác: ΔSCD vuông tại C, nên có $S_{SCD} = \frac{1}{2} CD.CS = \frac{1}{2}.a\sqrt{2}.2a = a^2\sqrt{2}$

Hơn nữa: $V_{S.HCD} = \frac{1}{3} S_{SCD}.d[H,(SCD)] \Rightarrow d[H,(SCD)] = \frac{3V_{S.HCD}}{S_{SCD}} = \frac{a}{3}$

11. Cho hình trụ có đáy là hai đường tròn tâm O và O', bán kính bằng chiều cao và bằng a. Trên đường tròn tâm O lấy điểm A. Trên đường tròn tâm O' lấy điểm B sao cho AB = 2a. Tính thể tích của khối tứ diện OO'AB.

Hướng dẫn giải



Kẻ đường sinh AA', gọi D là điểm đối xứng với A' qua tâm O' và H là hình chiếu của B trên A'D.

Ta có $BH \perp (AOO'A')$ nên $V = \frac{1}{3}BH.S_{AOO'}$.

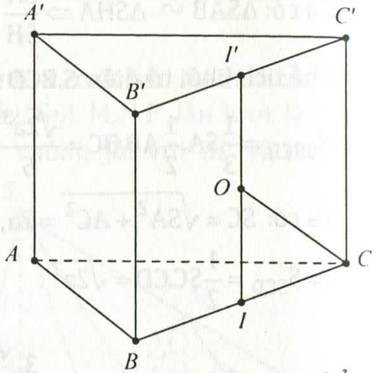
Ta có $A'B = \sqrt{3}a, BD = a$, tam giác BO'D đều

suy ra $BH = \frac{\sqrt{3}a}{2}$. Mặt khác $S_{AOO'} = \frac{1}{2}a^2$ nên suy ra

thể tích tứ diện OO'AB là $V_{OO'AB} = \frac{\sqrt{3}a^3}{12}$.

12. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', có đáy ABC là tam giác vuông tại A. Biết $AB = a$; $AA' = a\sqrt{3}$; $\widehat{ABC} = 60^0$. Xác định tâm và bán kính mặt cầu ngoại tiếp hình lăng trụ.

Hướng dẫn giải



Gọi I,I' lần lượt là trung điểm của BC, B'C'.

Ta có I,I' lần lượt là tâm đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, A'B'C'.

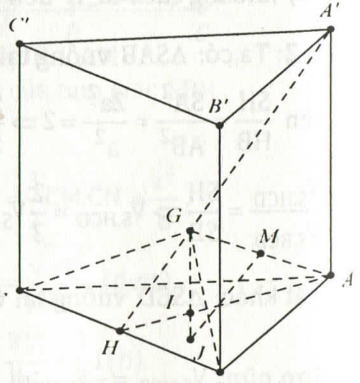
Gọi O là trung điểm của II' ta có O là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện. Bán kính R = OC.

Do $IC = \frac{BC}{2} = \frac{AB}{2\cos 60^0} = a$, $OI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$\Rightarrow R = \sqrt{OI^2 + IC^2} = \frac{a\sqrt{7}}{2}$

13. Cho hình lăng trụ tam giác đều ABC.A'B'C' có AB = a, góc giữa hai mặt phẳng (A'BC) và (ABC) bằng 60^0. Gọi G là trọng tâm tam giác A'BC. Tính thể tích khối lăng trụ đã cho và tính bán kính mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC theo a.

Hướng dẫn giải



Gọi H là trung điểm của BC, theo giả thuyết ta có : $\widehat{A'HA} = 60^0$.

Ta có : $AH = \frac{a\sqrt{3}}{2}, A'H = 2AH = a\sqrt{3}$ và $AA' = \frac{3a}{2}$.

Vậy thể tích khối lăng trụ

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}.\frac{3a}{2} = \frac{3a^3\sqrt{3}}{8} \text{ (đvtt).}$$

Gọi I là tâm của tam giác ABC,

suy ra $GI \parallel AA' \Rightarrow GI \perp (ABC)$

Gọi J là tâm mặt cầu ngoại tiếp tứ diện GABC suy ra J là giao điểm của GI với đường trung trực đoạn GA; M là trung điểm GA, ta có:

$$GM.GA = GJ.GI \Rightarrow R = GI = \frac{GM.GA}{GI} = \frac{GA^2}{2GI} = \frac{7a}{12}$$

Chuyên đề VI

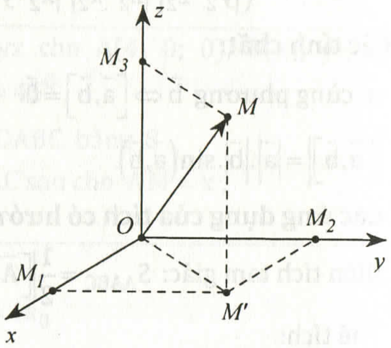
PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG KHÔNG GIAN

Dạng 1: Tọa độ trong không gian

I. Hệ trục tọa độ trong không gian Oxyz

- Hệ gồm ba trục Ox,Oy,Oz đôi một vuông góc được gọi là hệ trục tọa độ vuông góc trong không gian.
- Điểm O gọi là gốc của hệ tọa độ, trục Ox là trục hoành, Oy là trục tung và Oz là trục cao.
- Véctơ đơn vị trên các trục Ox,Oy,Oz lần lượt là $\vec{i},\vec{j},\vec{k}$, ta có:

  $|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1, \vec{i}.\vec{j} = \vec{j}.\vec{k} = \vec{k}.\vec{i} = 0.$



- Xét điểm M thỏa mãn $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$ thì M(x;y;z). Ngược lại, điểm M(x;y;z) thì $\overrightarrow{OM} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$.
- Với véctơ $\vec{u}$ trong hệ tọa độ Oxyz luôn tồn tại duy nhất bộ (x;y;z) thỏa mãn $\vec{u} = x.\vec{i} + y.\vec{j} + z.\vec{k}$. Tọa độ $\vec{u}$ là (x;y;z).

II. Tọa độ véc tơ – Tọa độ điểm

Cho $\vec{a} = (x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b} = (x_2;y_2;z_2)$ và số thực k. Khi đó

* $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2;y_1 \pm y_2)$ * $k\vec{a} = (kx_1;ky_1;kz_1)$

* $\vec{a} \,//\, \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} = k\vec{b} \Leftrightarrow \frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k \Rightarrow \vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ y_1 = y_2 \\ z_1 = z_2 \end{cases}$.

Chú ý: Nếu $x_2 = 0$ $(y_2 = 0, z_2 = 0)$ thì $x_1 = 0$ $(y_1 = 0, z_1 = 0)$

* $|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}$ * $\vec{a}.\vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$

* $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 0$ * $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a}.\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

Cho $A = (x_A;y_A;z_A)$, $B = (x_B;y_B;z_B)$, $C(x_C;y_C;z_C)$, $D(x_D;y_D;z_D)$. Khi đó:

* $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;y_B - y_A;z_B - z_A)$

* $AB = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

* Trung điểm I của đoạn AB: $I=\left(\frac{x_A+x_B}{2};\frac{y_A+y_B}{2};\frac{z_A+z_B}{2}\right)$

* Trọng tâm G của ΔABC: $G\left(\frac{x_A+x_B+x_C}{3};\frac{y_A+y_B+y_C}{3};\frac{z_A+z_B+z_C}{3}\right)$

* Trọng tâm G của tứ diện ABCD:

$$G\left(\frac{x_A+x_B+x_C+x_D}{4};\frac{y_A+y_B+y_C+y_D}{4};\frac{z_A+z_B+z_C+z_D}{4}\right)$$

III. Tích có hướng của hai véc tơ và ứng dụng

1. Định nghĩa: Cho $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$ và $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$

$$\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\left(\begin{vmatrix}y_1 & z_1\\ y_2 & z_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}z_1 & x_1\\ z_2 & x_2\end{vmatrix};\begin{vmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{vmatrix}\right)$$

2. Các tính chất:

* $\vec{a}$ cùng phương $\vec{b}\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right]=\vec{0}$ * $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{a}$ và $\left[\vec{a},\vec{b}\right]\perp\vec{b}$

* $\left|\left[\vec{a},\vec{b}\right]\right|=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right|.\sin\left(\vec{a},\vec{b}\right)$

3. Các ứng dụng của tích có hướng

* Diện tích tam giác: $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|$.

* Thể tích:

- **Hình hộp:** $V_{ABCD.A'B'C'D'}=\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}\right].\overrightarrow{AA'}\right|$
- **Tứ diện:** $V_{ABCD}=\frac{1}{6}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}\right|$.

Điều kiện 3 véctơ đồng phẳng:

- $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=0$
- A,B,C,D đồng phẳng $\Leftrightarrow\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right].\overrightarrow{AD}=0$.

Ví dụ 1. Trong không gian với hệ tọa độ Oxyz cho điểm $A(3;-2;4)$. Tìm tọa độ điểm E thuộc mặt phẳng (Oyz) sao cho tam giác AEB cân tại E và có diện tích bằng $3\sqrt{29}$ với $B(-1;4;-4)$.

Lời giải

Vì $E\in(Oyz)$ nên $E(0;x;y)$

Suy ra $\overrightarrow{AE}=(-3;y+2;z-4)$, $\overrightarrow{BE}=(1;y-4;z+4)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]=(8y+6z-8;4z+8;10-4y)$

Nên từ giả thiết bài toán ta có: $\begin{cases}AE^2=BE^2\\ \frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|=3\sqrt{29}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}AE^2=BE^2\\ \left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|^2=1044\end{cases}$

$$AE^2=BE^2\Leftrightarrow 9+(y+2)^2+(z-4)^2=1+(y-4)^2+(z+4)^2\Leftrightarrow y=\frac{4z+1}{3}$$

$$\left|\left[\overrightarrow{AE},\overrightarrow{BE}\right]\right|^2=1044\Leftrightarrow(8y+6z-8)^2+(4z+8)^2+(10-4y)^2=1044$$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{50z-16}{3}\right)^2+(4z+8)^2+\left(\frac{26-16z}{3}\right)^2-1044=0\Leftrightarrow z=2,z=-\frac{34}{25}$$

- $z=2\Rightarrow y=3$ nên $E(0;3;2)$
- $z=-\frac{34}{25}\Rightarrow y=-\frac{37}{25}$ nên $\left(0;-\frac{37}{25};-\frac{34}{25}\right)$.

Ví dụ 2. Trong không gian với hệ trục Oxyz cho A(4; 0; 0), B(x₀; y₀; 0) $x_0,y_0>0$ thỏa mãn $AB=2\sqrt{10}$ và $\widehat{AOB}=45^0$.

1. Tìm C trên tia Oz sao cho thể tích tứ diện OABC bằng 8.
2. Gọi G là trọng tâm ΔABO và M trên cạnh AC sao cho $AM=x$. Tìm x để $OM\perp GM$

Lời giải

Ta có: $\overrightarrow{OA}=(4;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(x_0;y_0;0)\Rightarrow\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=4x_0$

Theo giả thiết bài toán ta có hệ phương trình sau: $\begin{cases}(x_0-4)^2+y_0^2=40\\ \frac{4x_0}{4.\sqrt{x_0^2+y_0^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x_0^2+y_0^2-8x_0=24\\ \sqrt{2}x_0=\sqrt{x_0^2+y_0^2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y_0^2=x_0^2\\ x_0^2-4x_0-12=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_0=6\\ y_0=6\end{cases}\Rightarrow B(6;6;0).$$

1. Do $C\in Oz\Rightarrow C(0;0;m)$, $m>0$.

   Ta có: $\overrightarrow{OA}=(4;0;0)$, $\overrightarrow{OB}=(6;6;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right]=(0;0;24)$ và $\overrightarrow{OC}=(0;0;m)$

   $\Rightarrow\left[\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}\right].\overrightarrow{OC}=24m\Rightarrow V_{OABC}=\frac{1}{6}.24m=8\Leftrightarrow m=2\Rightarrow C(0;0;2)$.

2. Ta có $G\left(\frac{10}{3};2;0\right)$, $\overrightarrow{AM}=x\overrightarrow{AC}=(-4x;0;2x)$

   $\Rightarrow M(4-4x;0;2x)\Rightarrow\overrightarrow{OM}=(4-4x;0;2x)$ $\overrightarrow{GM}=\left(\frac{2}{3}-4x;2;2x\right)$

$$\Rightarrow OM\perp GM \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}.\overrightarrow{GM}=0 \Leftrightarrow (4-4x)\left(\frac{2}{3}-4x\right)+4x^2=0$$

$$\Leftrightarrow 20x^2-\frac{56}{3}x+\frac{8}{3}=0 \Leftrightarrow 15x^2-14x+2=0 \Leftrightarrow x=\frac{7\pm\sqrt{19}}{15}.$$

Ví dụ 3. Cho hình chóp S.ABCD với điểm A(4; –1; 2), B(–1; 0; –1) và C(0; 0; –2), D(10; –2; 4). Gọi M là trung điểm của CD. Biết SM vuông góc với mặt phẳng (ABCD) và thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=66$ (đvtt). Tìm tọa độ đỉnh S .

Lời giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(-5;1;-3),\overrightarrow{DC}(-10;2;-6)\Rightarrow \overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}$ nên ABCD là hình thang và

$S_{ADC}=2S_{ABC}$, hay $S_{ABCD}=3S_{ABC}$.

Vì $\overrightarrow{AB}(-5;1;-3),\overrightarrow{AC}(-4;1;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-8;-1)$, do đó

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{66}}{2}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{66}}{2}\text{ (đvdt).}$$

Chiều cao của khối chóp là $SM=\dfrac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=2\sqrt{66}$.

Vì $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\perp\overrightarrow{AB},\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\perp\overrightarrow{AC}$ nên giá của véc tơ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ vuông góc với mặt phẳng (ABCD), mà $SM\perp(ABCD)$ nên tồn tại số thực k sao cho:

$\overrightarrow{SM}=k.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-k;-8k;-k)$.

Suy ra $2\sqrt{66}=\left|\overrightarrow{SM}\right|=\sqrt{(-k)^2+(-8k)^2+(-k)^2}\Leftrightarrow|k|=2\Leftrightarrow k=\pm2.$

M là trung điểm CD nên $M(5;-1;1)\Rightarrow\overrightarrow{SM}(5-x_S;-1-y_S;1-z_S)$.

- Nếu $k=2$ thì $\overrightarrow{SM}=(5-x_S;-1-y_S;1-z_S)=(-2;-16;-2)$ nên tọa độ của điểm S là S(7;15;3).
- Nếu $k=-2$ thì $\overrightarrow{SM}=(5-x_S;-1-y_S;1-z_S)=(2;16;2)$ nên tọa độ của điểm S là S(3;–17;–1).

Vậy tọa độ các điểm S cần tìm là S(7;15;3) hoặc S(3;–17;–1).

Dạng 2: Phương trình mặt phẳng

1. Để lập phương trình của một mặt phẳng (P), ta cần tìm một điểm mà (P) đi qua và một VTPT của (P). Khi tìm VTPT của (P) chúng ta cần lưu ý một số tính chất sau:

- Nếu hai véc tơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$ có giá song song hoặc nằm trên (P) thì $\vec{n}=\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là một VTPT của (P).
- Nếu hai mặt phẳng song song với nhau thì VTPT của mặt phẳng này cũng là VTPT của mặt phẳng kia.
- Nếu (P) chứa (hoặc song song) với AB thì giá của véc tơ $\overrightarrow{AB}$ sẽ nằm trên (hoặc song song) với (P).
- Nếu $(P)\perp(Q)$ thì VTPT của mặt phẳng này sẽ có giá nằm trên hoặc song song với mặt phẳng kia.
- Nếu $(P)\perp AB$ thì $\overrightarrow{AB}$ là một VTPT của (P).
- Thông thường để lập phương trình mặt phẳng ta thường đi tìm cặp véc tơ có giá song song hoặc nằm trên (P), từ đó tìm được VTPT của (P).

2. Các trường hợp đặc biệt

- Mặt phẳng (α) đi qua ba điểm không trùng với gốc tọa độ A(a; 0; 0), B(0; b; 0), C(0; 0; c) có phương trình $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$.
- Các mặt phẳng tọa độ $(Oyz):x=0,(Ozx):y=0,(Oxy):z=0$.
- Mặt phẳng (α) qua gốc tọa độ $Ax+By+Cz=0$.
- Mặt phẳng (α) song song (D ≠ 0) hoặc chứa (D = 0) trục Ox có dạng
  $By+cz+D=0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D\neq0)$ hoặc chứa $(D=0)$ trục Oy có dạng
  $Ax+Cz+D=0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D\neq0)$ hoặc chứa $(D=0)$ trục Oz có dạng
  $Ax+By+D=0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D\neq0)$ với mặt phẳng (Oxy) có phương trình là
  $Cz+D=0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D\neq0)$ với mặt phẳng (Oyz) có phương trình là
  $Ax+D=0$.
- Mặt phẳng (α) song song $(D\neq0)$ với mặt phẳng (Ozx) có phương trình là
  $By+D=0$.

Ví dụ 1. Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:

1. (α) đi qua M(2;3;1) và song song với mặt phẳng $(P):x-2y+3z-1=0$.
2. (α) đi qua A(2;1;1),B(–1;–2;–3) và (α) vuông góc với $(\beta):x+y+z=0$.
3. (α) chứa trục Ox và vuông góc với $(Q):2x+3y-z+2=0$.

Lời giải

1. Ta có $\vec{n}=(1;-2;3)$ là VTPT của (P)

Vì $(\alpha)\parallel(P)$ nên $\vec{n}=(1;-2;3)$ cũng là VTPT của (α).

Vậy phương trình (α) là: $x-2y+3z+1=0$.

2. Ta có $\vec{a}=(1;1;1)$ là VTPT của (β), $\overrightarrow{AB}=(-3;-3;-4)$. Suy ra $\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;1;0)$

Vì (α) đi qua A,B và $(\alpha)\perp(\beta)$ nên (α) nhận $\vec{n}=\left[\vec{a},\overrightarrow{AB}\right]=(-1;1;0)$ làm VTPT

Vậy phương trình (α) là: $x-y-1=0$.

3. Vì (α) chứa trục Ox và vuông góc với (Q) nên (α) nhận $\Leftrightarrow H\equiv K$ làm VTPT

Trong đó $\vec{i}=(1;0;0)$, $\vec{a}=(2;3;-1)$ là VTPT của (Q) nên $\vec{n}=(0;1;3)$.

Vậy phương trình (α) là: $y+3z=0$.

Ví dụ 2. Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:

1. (α) đi qua $A(-1;1;1),B(3;0;2)$ và khoảng cách từ $C(1;0;-2)$ đến (α) bằng 2

2. (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), đồng thời (α) vuông góc với mặt phẳng $(\beta):3x+2y-z+5=0$.

Lời giải

1. Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$a(x+1)+b(y-1)+c(z-1)=0\ \ (1)$

Do $B\in(\alpha)$ nên ta có: $4a-b+c=0\Rightarrow b=4a+c$

Mặt khác $d(C,(\alpha))=2\Leftrightarrow\dfrac{|2a-b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2\Leftrightarrow\dfrac{|2a+4c|}{\sqrt{a^2+(4a+c)^2+c^2}}=2$

$\Leftrightarrow(a+2c)^2=17a^2+8ac+2c^2\Leftrightarrow 8a^2+2ac-c^2=0\Leftrightarrow c=-2a,c=4a$

- $MI=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]\right|}{|\vec{u}_{d'}|}$, ta chọn M nên phương trình $(\alpha):x+2y-2z+1=0$
- $c=4a$ ta chọn $a=1\Rightarrow c=4,b=8$ nên phương trình $(\alpha):x+8y+4z-11=0$.

2. Gọi E,F là hai điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q).

Khi đó tọa độ của E,F là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y+2z-1=0\\x-2y+2z-4=0\end{cases}\ (*)$

Cho $x=0$, từ (*) ta có $y=-1,z=1\Rightarrow E(0;-1;1)$

Cho $x=6$, từ (*) ta có $y=-3,z=-4\Rightarrow F(6;-3;-4)$

Suy ra $\overrightarrow{EF}=(6;-2;-5)$.

Vì (α) đi qua E,F và vuông góc với (β) nên (α) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{EF},\vec{a}\right]$ làm VTPT

Trong đó $\vec{a}=(3;2;-1)$ là VTPT của (β) nên $\vec{n}=(12;-9;18)$

Vậy phương trình của $(\alpha):4x-3y+6z-9=0$.

Ví dụ 3. Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:

1. (α) đi qua $A(1;-1;1),B(2;0;3)$ và (α) song song với Ox

2. (α) đi qua $M(3;0;1)$, $N(6;-2;1)$ và (α) tạo với (Oyz) một góc φ thỏa $\cos\varphi=\dfrac{2}{7}$.

Lời giải

1. Vì (α) song song với Ox nên phương trình của (α) có dạng: $ay+bz+c=0$

Do $A,B\in(\alpha)$ nên ta có: $\begin{cases}-a+b+c=0\\3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-3b\\a=-2b\end{cases}$, chọn $b=-1\Rightarrow a=2,c=3$

Vậy phương trình của $(\alpha):2y-z+3=0$.

2. Vì $M\in(\alpha)$ nên phương trình của (α) có dạng:

$a(x-3)+by+c(x-1)=0\Leftrightarrow ax+by+cx-3a-c=0\ (1)$

Do $N\in(\alpha)\Rightarrow 3a-2b=0\Rightarrow b=\dfrac{3}{2}a$

Mặt khác $\cos\varphi=\dfrac{2}{7}$ và $\vec{i}=(1;0;0)$ là VTPT của (Oyz) nên ta có:

$\dfrac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{2}{7}\Leftrightarrow 49a^2=4\left[a^2+\dfrac{9}{4}a^2+c^2\right]=13a^2+4c^2\Leftrightarrow c=\pm3a$

Ta chọn $a=2\Rightarrow b=3,c=\pm6$.

Từ đó ta có phương trình của (α) là: $2x+3y+6z-12=0$ hoặc $2x+3y-6z=0$.

Ví dụ 4. Lập phương trình mặt phẳng (α) đi qua điểm $M(1;9;4)$ và cắt các trục tọa độ tại các điểm A,B,C (khác gốc tọa độ) sao cho:

$8.OA=12.OB+16=37.OC$ và $x_A>0,\ z_C<0.$

Lời giải

Vì $x_A>0,z_C<0$ nên $a>0,c<0$, do đó

$8OA=12OB+16=37OC\Leftrightarrow 8a=12|b|+16=-37c.$

- Nếu $b>0\Rightarrow c=-\dfrac{8}{37}a,b=\dfrac{2a-4}{3},a>2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{2a-4}-\frac{37}{2a}=1\Leftrightarrow a^2+2a-35=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=5\\a=-7\end{array}\right.$$

Vì d' nên d phương trình mặt phẳng cần tìm là

$(\alpha): 8x+20y-37z-40=0.$

- Nếu $b<0\Rightarrow c=-\frac{8}{37}a, b=\frac{4-2a}{3}, a>2$ nên từ (1) ta có

$$\frac{1}{a}+\frac{27}{4-2a}-\frac{37}{2a}=1\Leftrightarrow a^2+29a-35=0\Leftrightarrow a=\frac{-29\pm3\sqrt{109}}{2}$$

Vì $a>2$ nên không có giá trị thỏa mãn.

Vậy phương trình mặt phẳng $(\alpha): 8x+20y-37z-40=0.$

Dạng 3: Phương trình đường thẳng

Phương pháp chung để lập phương trình của đường thẳng Δ ta cần đi tìm một điểm đi qua và một véc tơ chỉ phương (VTCP). Khi tìm VTCP của đường thẳng Δ, ta cần lưu ý:

* Nếu giá của hai véc tơ không cùng phương $\vec{a},\vec{b}$ cùng vuông góc với Δ thì $\left[\vec{a},\vec{b}\right]$ là một VTCP của Δ.

* Nếu đường thẳng Δ đi qua hai điểm phân biệt M,N thì $\overrightarrow{MN}$ là một VTCP của đường thẳng Δ.

Trong một số trường hợp chúng ta thường xác định đường thẳng bằng các cách sau:

Cách 1: Tìm hai điểm A,B thuộc đường thẳng Δ. Khi tìm điểm thuộc đường thẳng ta cần lưu ý: $M\in d:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}\Leftrightarrow M(x_0+at;y_0+bt;z_0+ct)$

Cách 2: Tìm hai mặt phẳng phân biệt chứa đường thẳng Δ. Khi đó Δ chính là giao tuyến của hai mặt phẳng đó. Vì có nhiều mặt phẳng chứa Δ nên khi chọn mặt phẳng chứa Δ, ta thường dựa vào các dấu hiệu sau:

* Nếu đường thẳng d đi qua M và vuông góc với d' thì đường thẳng d nằm trong mặt phẳng đi qua M và vuông góc với d'.

* Nếu đường thẳng Δ đi qua M và cắt đường thẳng d thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng đi qua M và đường thẳng d.

* Nếu đường thẳng Δ đi qua M và song song với mặt phẳng (P) thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng đi qua M và song song với (P).

* Nếu đường thẳng Δ song song với đường thẳng d và cắt đường thẳng d' thì đường thẳng Δ nằm trong mặt phẳng chứa d' và song song với đường thẳng d

Ví dụ 1. Cho đường thẳng $\Delta:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-3}$ và điểm $A(2;-5;-6)$.

1. Tìm tọa độ hình chiếu của A lên đường thẳng Δ.
2. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ sao cho $AM=\sqrt{35}$.

Lời giải

Ta có $\vec{u}=(2;1;-3)$ là VTCP của đường thẳng Δ

1. **Cách 1.**

Gọi H là hình chiếu của A lên đường thẳng Δ, suy ra $H(1+2t;-2+t;-1-3t)$

$\Rightarrow\overrightarrow{AH}=(2t-1;t+3;-3t+5)$.

Vì $AH\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{AH}.\vec{u}=0\Leftrightarrow 2(2t-1)+(t+3)-3(-3t+5)=0\Leftrightarrow 14t-14=0\Leftrightarrow t=1$

Vậy $H(3;-1;-4)$.

Cách 2. Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và vuông góc với Δ

Suy ra phương trình $(P): 2x+y-3z-17=0$. Khi đó $H=\Delta\cap(P)$ nên tọa độ của H là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y-3z-17=0\\ \frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z+1}{-3}\end{cases}$, giải hệ này ta tìm được $H(3;-1;-4)$.

2. Vì $M\in\Delta\Rightarrow M(1+2t;-2+t;-1-3t)\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(2t-1;t+3;-3t+5)$

Nên $AM=\sqrt{35}\Leftrightarrow(2t-1)^2+(t+3)^2+(3t-5)^2=35\Leftrightarrow t^2-2t=0\Leftrightarrow t=0,t=2$

- $t=0\Rightarrow M(1;-2;-1)$
- $t=2\Rightarrow M(5;0;-7)$.

Ví dụ 2. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng Δ, biết

1. Δ đi qua $A(1;2;1)$ đồng thời Δ cắt đường thẳng $d_1:\begin{cases}x=1+t\\y=2-t\\z=t\end{cases}$ và vuông góc với đường thẳng $d_2:\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{1}=\frac{z+3}{-2}$
2. Δ đi qua $B(9;0;-1)$, đồng thời Δ cắt hai đường thẳng $\Delta_1:\frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1}$, $\Delta_2:\frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-3}$

Lời giải

1. **Cách 1:** Gọi (P) là mặt phẳng đi qua A và d_1, khi đó ta có $\Delta\subset(P)$

Ta có đường thẳng d_1 đi qua M(1; 2; 0) và d_1 có $\overrightarrow{u_1}=(1;-1;1)$ là VTCP

Nên $\vec{n} = \left[\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{u_1}\right] = (-1;-1;0)$ là VTPT của (P).

Vì $\begin{cases} \Delta \subset (P) \\ \Delta \perp d_2 \end{cases}$, suy ra $\vec{u} = \left[\vec{n}, \overrightarrow{u_2}\right] = (2;-2;1)$ là VTCP của $\cdot \Leftrightarrow a = -11, b = 25, c = 1$

(trong đó $\overrightarrow{u_2} = (2;1;-3)$ là VTCP của đường thẳng d_2).

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$

Cách 2: Gọi $E = \Delta \cap d_1$, suy ra $E(1+t;2-t;t)$ nên $\overrightarrow{AE} = (t;-t;t-1)$

Vì $\Delta \perp d_2 \Rightarrow \overrightarrow{AE}.\overrightarrow{u_2} = 0 \Leftrightarrow 2t - t - 2(t-1) = 0 \Leftrightarrow t = 2 \Rightarrow \overrightarrow{AE} = (2;-2;1)$

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng $\Leftrightarrow MI$ là: $\frac{x-1}{2} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-1}{1}$

2. Đường thẳng Δ_1 đi qua $C(1;3;-1)$ và có $\overrightarrow{v_1} = (2;-1;1)$ là VTCP

Đường thẳng Δ_2 đi qua $D(-2;3;4)$ và có $\overrightarrow{v_2} = (-1;1;-3)$ là VTCP

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và Δ_1, suy ra $\Delta \subset (\alpha)$ và

$\overrightarrow{n_1} = \left[\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{BC}\right] = (-3;-8;-2)$ là VTPT của (α).

Gọi (β) là mặt phẳng đi qua B và Δ_2, suy ra $\Delta \subset (\beta)$ và $\overrightarrow{n_2} = \left[\overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{BD}\right] = (14;38;8)$ là VTPT của (β).

Ta có EM là giao tuyến của (α) và (β) nên $\vec{a} = \left[\overrightarrow{n_1}, \overrightarrow{n_2}\right] = (12;-4;-2)$ là VTCP

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\frac{x-9}{6} = \frac{y}{-2} = \frac{z+1}{-1}$

Ví dụ 3. Lập phương trình chính tắc của đường thẳng $\Leftrightarrow \overrightarrow{IA} = 6\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{AB}$, biết

1. Δ là hình chiếu vuông góc của $d: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1}$ lên mp $(\alpha): x + y + z - 1 = 0$.

2. Δ đi qua $A(2;3;-1)$ và cắt d tại điểm B sao cho $d(B,(\alpha)) = 2\sqrt{3}$.

Lời giải

1. Đường thẳng d đi qua $M(1;2;0)$ và có $\vec{v} = (1;2;-1)$ là VTCP.

Mặt phẳng (α) có $\vec{n} = (1;1;1)$ là VTPT

Xét hệ phương trình $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z}{-1} \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$, giải hệ này ta được $x = 0, y = 0, z = 1$,

suy ra d và (α) cắt nhau tại $I(0;0;1)$ và $I \in \Delta$.

Cách 1: Gọi (P) là mặt phẳng đi qua d và vuông góc với (α)

Ta có $\overrightarrow{n_1} = \left[\vec{v}, \vec{n}\right] = (3;-2;-1)$ là VTPT của (P)

Vì $\Delta = (\alpha) \cap (P)$ nên $\vec{u} = \left[\vec{n}, \overrightarrow{n_1}\right] = (-1;-4;5)$ là VTCP của Δ

Vậy phương trình của đường thẳng Δ là: $\frac{x}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{5}$.

Cách 2 : Gọi N là hình chiếu của M lên (α), vì $MN \perp (\alpha)$ nên $\vec{n} = (1;1;1)$ là VTCP của MN, suy ra phương trình $MN: \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1}$

Do $N = MN \cap (\alpha)$ nên tọa độ của A là nghiệm của hệ: $\begin{cases} \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z}{1} \\ x + y + z - 1 = 0 \end{cases}$

Giải hệ này ta tìm được: $x = \frac{1}{3}, y = \frac{4}{3}, z = -\frac{2}{3} \Rightarrow N\left(\frac{1}{3};\frac{4}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

Khi đó đường thẳng $\Delta \equiv IN$, từ đó ta lập được phương trình Δ:

$$\frac{x}{-1} = \frac{y}{-4} = \frac{z-1}{5}.$$

2. Vì $B \in d \Rightarrow B(1+t;2+2t;-t)$, khi đó

$$d(B,(\alpha)) = \frac{|2t+2|}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \Leftrightarrow |t+1| = 3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = -4 \end{array}\right.$$

- $t = 2 \Rightarrow B(3;6;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (1;3;-1)$, suy ra phương trình Δ là:

$$\frac{x-3}{1} = \frac{y-6}{3} = \frac{z+2}{-1}.$$

- $t = -2 \Rightarrow B(-3;-6;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} = (-5;-9;3)$, suy ra phương trình Δ là:

$$\frac{x+3}{-5} = \frac{y+6}{-9} = \frac{z-2}{3}.$$

Ví dụ 4. Trong không gian Oxyz cho hai đường thẳng:

$d_1: \frac{x-1}{1} = \frac{y+3}{2} = \frac{z+2}{3}$ và $d_2: \frac{x-4}{1} = \frac{y-2}{-4} = \frac{z-3}{-3}$.

Chứng minh rằng hai đường thẳng O chéo nhau. Viết phương trình đường vuông góc chung và tính khoảng cách giữa hai đường thẳng đó.

Lời giải

Đường thẳng d_1 đi qua $A(1;-3;-2)$ và có $\overrightarrow{u_1} = (1;2;3)$ là VTCP

Đường thẳng d_2 đi qua $B(4;2;3)$ và có $\overrightarrow{u_2} = (1;-4;-3)$ là VTCP

Ta có: $\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right]=(6;6;-6)$, $\overrightarrow{AB}=(3;5;5)\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\right].\overrightarrow{AB}=18\neq 0$ suy ra hai đường thẳng d_1,d_2 chéo nhau.

Gọi MN là đường vuông góc chung của hai đường thẳng d₁d₂ (với $M\in d_1$, $N\in d_2$)

Suy ra $M(1+t;-3+2t;-2+3t)$, $N(4+t';2-4t';3-3t')$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MN}=(-t+t'+3;-2t-4t'+5;-3t-3t'+5)$$

Vì $\begin{cases}MN\perp d_1\\MN\perp d_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_1}=0\\\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{u_2}=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}1(-t+t'+3)+2(-2t-4t'+5)+3(-3t-3t'+5)=0\\1(-t+t'+3)-4(-2t-4t'+5)-3(-3t-3t'+5)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}7t+8t'-14=0\\8t+13t'-16=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}t=2\\t'=0\end{cases}$$

Từ đó suy ra $M(3;1;4)$, $\overrightarrow{MN}=(1;1;-1)$

Vậy phương trình $MN:\dfrac{x-3}{1}=\dfrac{y-1}{1}=\dfrac{z-4}{-1}$

Dạng 4: Phương trình mặt cầu

I. Lập phương trình mặt cầu:

- Để lập phương trình mặt cầu ta cần tìm tâm $I(a;b;c)$ và bán kính R.

  Khi đó phương trình mặt cầu có dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ (1).

- Ngoài ra để lập phương trình mặt cầu ta có thể tìm các hệ số a,b,c,d trong phương trình : $x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz+d=0$ (2).

  Với tâm $I(a;b;c)$, bán kính $R^2=a^2+b^2+c^2-d>0$.

- Một mặt cầu được hoàn toàn xác định khi biết tâm và bán kính hoặc biết đường kính.

II. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và mặt phẳng:

Cho mặt cầu tâm I, bán kính R và mặt phẳng (α), $h=d(I,(\alpha))$, H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α).

- $h>R$ thì (α) và mặt cầu (I) không giao nhau
- $h=R$ thì (α) và mặt cầu (I) tiếp xúc nhau tại H
- $h<R$ thì (α) và mặt cầu (I) cắt nhau theo giao tuyến là đường tròn tâm H, bán kính $r=\sqrt{R^2-h^2}$.

III. Vị trí tương đối giữa mặt cầu và đường thẳng:

Cho mặt cầu tâm I, bán kính R và đường thẳng Δ, $h=d(I,\Delta)$, H là hình chiếu của I lên mặt phẳng Δ.

- $h>R$ thì Δ và mặt cầu (I) không giao nhau.
- $h=R$ thì Δ và mặt cầu (I) tiếp xúc nhau tại H. Hay Δ là tiếp tuyến của mặt cầu (I).
- $h<R$ thì Δ và mặt cầu (I) cắt nhau tại hai điểm phân biệt A,B và H là trung điểm của dây cung AB, do đó: $R^2=\dfrac{AB^2}{4}+h^2$.

Ví dụ 1. Lập phương trình mặt cầu $S(I,R)$:

1. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $\Delta:\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha_1): 3x+2y+z-6=0$ và mặt phẳng $(\alpha_2): 2x+3y+z=0$.
2. Mặt cầu có tâm $I(1;3;5)$ và cắt $\Delta':\dfrac{x-2}{-1}=\dfrac{y+3}{1}=\dfrac{z}{1}$ tại hai điểm A, B sao cho $AB=12$.
3. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $d:\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$, đi qua $M(1;1;4)$ và tiếp xúc với $d':\dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-4}$.

Lời giải

1. Vì tâm $I\in\Delta$ nên $I(-2+t;1+2t;-1-2t)$.

   Mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên : $d(I,(\alpha_1))=d(I,(\alpha_2))=R$

   Suy ra $\dfrac{|3(-2+t)+2(1+2t)-1-t-6|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\dfrac{|2(-2+t)+3(1+2t)-1-t|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}$

   $$\Leftrightarrow|6t-11|=|7t-2|\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}6t-11=7t-2\\6t-11=2-7t\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-9\\t=1\end{array}\right.$$

- Nếu $t=1$ thì $I(-1;3;-3), R=\dfrac{5}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

  $$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\frac{25}{14}.$$

- Nếu $t=-9$ thì $I(-11;-17;17), R=\dfrac{65}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

  $$(x+11)^2+(y+17)^2+(z-17)^2=\frac{4225}{14}.$$

2. Đường thẳng Δ' qua điểm $M(2;-3;0)$ và có véc tơ chỉ phương là $\vec{u}_{\Delta'}(-1;1;1)$.

Ta có $\overrightarrow{IM}(1;6;5)$ nên $\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_{\Delta}\right]=(1;-4;5)$ do đó

$$d(I,\Delta')=\frac{\left|\left[\overrightarrow{IM},\vec{u}_{\Delta'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{\Delta'}\right|}=\frac{\sqrt{1^2+(-4)^2+5^2}}{\sqrt{(-1)^2+1^2+1^2}}=\sqrt{14}.$$

Vì mặt cầu cắt Δ' tại hai điểm A,B nên bán kính mặt cầu được xác định theo công thức : $R^2=d^2(I,\Delta')+\left(\frac{AB}{2}\right)^2=14+36=50$

Vậy mặt cầu cần tìm có phương trình là: $(x-1)^2+(y-3)^2+(z-5)^2=50$.

3. Đường thẳng d' qua điểm $N(-2;-2;4)$ và có $\overrightarrow{u_{d'}}=(1;1;-4)$ là VTCP

Vì tâm mặt cầu $I\in d$ nên $I(2+t;-t;3+2t)$

Ta có $\overrightarrow{MI}=(t+1;-t-1;2t-1)$, $\overrightarrow{NI}=(4+t;2-t;-1+2t)$ nên

$$\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]=(2t-7;6t+15;2t+2).$$

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI=d(I,d')=R.$

Do đó $MI=\frac{\left|\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]\right|}{\left|\vec{u}_{d'}\right|}$, hay

$$\sqrt{(2t-1)^2+2(1+t)^2}=\frac{\sqrt{(2t-7)^2+(6t+15)^2+(2t+2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}$$

$$\Leftrightarrow 18\left(6t^2+3\right)=44t^2+160t+278\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-1\\ t=\frac{7}{2}\end{array}\right.$$

- Với $t=-1$ thì $I(1;1;1),R=9$ nên phương trình mặt cầu

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$$

- Với $t=\frac{7}{2}$ thì $I\left(\frac{11}{2};-\frac{7}{2};10\right),R=\frac{3\sqrt{34}}{2}$ nên phương trình mặt cầu:

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+(z-10)^2=\frac{153}{2}.$$

Ví dụ 2. Cho mặt cầu $(S):(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=25$ và mặt phẳng (α) có phương trình $2x+2y+z+7=0$.

1. Chứng minh rằng mặt phẳng (α) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn. Xác định tâm và tìm bán kính của đường tròn đó.

2. Lập phương trình mặt phẳng (P) đi qua hai điểm $A(1;-1;2)$, $B(3;5;-2)$ và (P) cắt mặt cầu (S) theo một đường tròn có bán kính nhỏ nhất.

Lời giải

Mặt cầu (S) có tâm $I(1;1;1)$, bán kính $R=5$.

1. Ta có $d(I,(\alpha))=\frac{|2+2+1+7|}{\sqrt{2^2+2^2+1^2}}=4<R$, suy ra $C(1;0;-2)$ cắt mặt cầu (S) the đường tròn tâm H bán kính $r=\sqrt{R^2-d^2(I,(\alpha))}=3$

H là hình chiếu của I lên mặt phẳng (α), suy ra phương trình của HI là:

$$\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+2t\\ z=1+t\end{cases}$$

Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ $\begin{cases}x=1+2t\\ y=1+2t\\ z=1+t\\ 2x+2y+z+7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=y=-\frac{5}{3}\\ z=-\frac{1}{3}\end{cases}$

Vậy tâm $H\left(-\frac{5}{3};-\frac{5}{3};-\frac{1}{3}\right)$.

2. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;6;-4)$ nên phương trình đường thẳng $AB:\begin{cases}x=1+t\\ y=-1+3t\\ y=2-2t\end{cases}$

Vì $IA<R$ nên mặt phẳng (P) đi qua AB luôn cắt mặt cầu (S) theo đường tròn có bán kính $r=\sqrt{25-d^2(I,(P))}$.

Do đó r nhỏ nhất $\Leftrightarrow d(I,(P))$ lớn nhất.

Gọi K,H lần lượt là hình chiếu của I lên AB và (P), ta luôn có $IH\le IK$ nên suy ra $d(I,(P))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Do $H\in AB\Rightarrow H(1+t;-1+3t;2-2t)\Rightarrow\overrightarrow{IH}=(t;3t-2;1-2t)$

Vì $IH\perp AB\Rightarrow\overrightarrow{IH}.\overrightarrow{AB}=0\Leftrightarrow t+3(3t-2)-2(1-2t)=0\Leftrightarrow t=\frac{4}{7}\Rightarrow\overrightarrow{IH}=\left(\frac{4}{7};-\frac{2}{7};-\frac{1}{7}\right)$

Vậy phương trình $(\alpha):4x-2y-z-4=0$.

Dạng 5: Cực trị trong không gian

Cách 1: Sử dụng phương pháp hình học

Cách 2: Sử dụng phương pháp đại số.

Ví dụ 1. Trong không gian $AB = a, AD = 2a$ cho mặt phẳng $(P): 2x - y + 2z - 6 = 0$ và hai điểm $A(5;-2;6)$, $B(3;-2;1)$. Tìm điểm A thuộc (P) sao cho:

1. MA + MB nhỏ nhất **2.** $|MA - MB|$ lớn nhất

Lời giải

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P} = (2;-1;2)$ là VTPT

Thay tọa độ hai điểm A, B vào vế trái phương trình của (P) ta được 18 và 4 nên hai điểm A, B nằm về cùng một phía so với (P).

1. Gọi A' là điểm đối xứng với A qua (P), khi đó A' và B ở khác phía so với (P) và với mọi điểm $M \in (P)$, ta có MA = MA'.

Do đó $\forall M \in (P): MA + MB = A'M + MB \geq A'B$, mà A'B không đổi và đẳng thức xảy ra khi $M = A'B \cap (P)$, suy ra MA + MB nhỏ nhất $\Leftrightarrow M = A'B \cap (P)$.

Ta có: $AA' \perp (P) \Rightarrow AA': \begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

Tọa độ giao điểm H của AA' và (P) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x = 5 + 2t \\ y = -2 - t \\ z = 6 + 2t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \Rightarrow H(1;-1;2) \\ z = 2 \end{cases}$$

H là trung điểm của $AA' \Rightarrow \begin{cases} x_{A'} = 2x_H - x_A = -3 \\ y_{A'} = 2y_H - y_A = 2 \\ z_{A'} = 2z_H - z_A = -2 \end{cases} \Rightarrow A'(-3;2;-2)$

Suy ra $\overrightarrow{A'B} = (6;-4;3)$, phương trình $A'B: \begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

Tọa độ M là nghiệm của hệ $\begin{cases} x = -3 + 6t \\ y = 2 - 4t \\ z = -2 + 3t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{21}{11} \\ y = -\dfrac{14}{11} \\ z = \dfrac{5}{11} \end{cases}$

Vậy $M\left(\dfrac{21}{11}; -\dfrac{14}{11}; \dfrac{5}{11}\right)$ là điểm cần tìm.

2. Vì A, B nằm về cùng một phía so với (P) nên với mọi $M \in (P)$ ta luôn có $|AM - MB| \leq AB$, đẳng thức xảy ra khi $M = AB \cap (P)$.

Phương trình $AB: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \end{cases}$

Tọa độ $M: \begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = -2 \\ z = 6 - 5t \\ 2x - y + 2z - 6 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{7} \\ y = -2 \\ z = -\dfrac{3}{7} \end{cases}$. Vậy $M\left(\dfrac{17}{7}; -2; -\dfrac{3}{7}\right)$.

Ví dụ 2. Trong không gian Oxyz cho đường thẳng $\Delta: \dfrac{x}{1} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{-1}$ và ba điểm $A(3;2;-1)$, $B(1;-2;1)$, $C(2;1;3)$. Tìm $M \in \Delta$ sao cho:

1. MA + MB nhỏ nhất **2.** MA + MC nhỏ nhất.

Lời giải

Vì $M \in \Delta \Rightarrow M(t;2t;1-t)$, $\overrightarrow{AM} = (t-3;2t-2;-t+2)$, $\overrightarrow{BM} = (t-1;2t+2;-t)$

$\overrightarrow{CM} = (t-2;2t-1;-t-2)$.

1. Ta có: $MA + MB = \sqrt{6t^2 - 18t + 17} + \sqrt{6t^2 + 6t + 5}$

$$= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức: $\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} \geq \sqrt{(a+c)^2 + (b+d)^2}$, đẳng thức xảy ra khi $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, ta có: $MA + MB \geq \sqrt{\left(\dfrac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t + \sqrt{6}t + \dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2 + \left(2\sqrt{\dfrac{7}{2}}\right)^2} = \sqrt{38}$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \dfrac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t = \sqrt{6}t + \dfrac{\sqrt{6}}{2} \Leftrightarrow t = \dfrac{1}{2}$.

Vậy $M\left(\dfrac{1}{2}; 1; \dfrac{1}{2}\right)$ là điểm cần tìm.

2. Ta có: $AM + CM = \sqrt{6t^2 - 18t + 17} + \sqrt{6t^2 - 4t + 9}$

$$= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2} - \sqrt{6}t\right)^2 + \left(\sqrt{\frac{7}{2}}\right)^2} + \sqrt{\left(\sqrt{6}t + \frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2 + \left(\frac{5}{\sqrt{3}}\right)^2}$$

$$\geq\sqrt{\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{14}}{2}+\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{96+5\sqrt{42}}{3}},$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}-t\right)\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{14}}{2}\left(\frac{1}{3}+t\right)\Leftrightarrow t=\frac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}}$.

Vậy $M\left(\frac{45-\sqrt{42}}{10+3\sqrt{42}};\frac{2\left(45-\sqrt{42}\right)}{10+3\sqrt{42}};\frac{4\sqrt{42}-35}{10+3\sqrt{42}}\right)$.

Ví dụ 3. Trong không gian Oxyz cho điểm $A(1;-1;1)$, đường thẳng Δ có phương trình : $\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z+1}{-1}$ và mặt phẳng $(P):2x-y+2z-1=0$:

1. Viết phương trình mặt phẳng (Q) chứa đường thẳng Δ và khoảng cách từ A đến (Q) lớn nhất.
2. Viết phương trình mặt phẳng (R) chứa Δ và tạo với (P) một góc nhỏ nhất.
3. Viết phương trình mặt phẳng (α) chứa hai điểm $M(1;1;1),N(-1;2;-1)$ và tạo với đường thẳng Δ một góc lớn nhất

Lời giải

Mặt phẳng (P) có $\overrightarrow{n_P}=(2;-1;2)$ là VTPT

Đường thẳng Δ đi qua $B(1;0;-1)$ và có $\vec{u}=(2;1;-1)$ là VTCP.

1. **Cách 1:** Giả sử $\vec{n}=(a;b;c)$ là VTPT của (Q), suy ra phương trình của (Q) có dạng: $a(x-1)+by+c(z+1)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a+c=0$ (1)

Do $\Delta\subset(Q)$ nên $2a+b-c=0\Rightarrow c=2a+b$.

Do đó: $d(A,(Q))=\frac{|2c-b|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{|4a+b|}{\sqrt{5a^2+4ab+2b^2}}=\sqrt{\frac{16a^2+8ab+b^2}{5a^2+4ab+2b^2}}$.

Nếu $b=0\Rightarrow d(A,(Q))=\frac{4}{\sqrt{5}}$

Nếu $b\neq0$ thì ta đặt $t=\frac{a}{b}$, ta có: $\frac{16a^2+8ab+b^2}{5a^2+4ab+2b^2}=\frac{16t^2+8t+1}{5t^2+4t+2}=f(t)$

Xét hàm số $f(t)$ với $t\in\mathbb{R}$ ta có: $f'(t)=\frac{24t^2+54t+12}{(5t^2+4t+2)^2}$, $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-2,t=-\frac{1}{4}$

Suy ra $\max f(t)=f(-2)=\frac{7}{2}$, do đó $\max d(A,(Q))=\frac{\sqrt{14}}{2}$, đạt được khi $a=-2b$

Chọn $b=-1$ ta tìm được $a=2,c=3$.

Vậy phương trình $(Q):2x-y+3z+1=0$.

Cách 2: Gọi K,H lần lượt là hình chiếu của A lên Δ và (Q), khi đó $d(A,(Q))=AH\leq AK$, mà AK không đổi nên $d(A,(Q))$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Dẫn tới (Q) là mặt phẳng đi qua K và nhận $\overrightarrow{AK}$ làm VTPT.

Vì $K\in\Delta\Rightarrow K(1+2t;t;-1-t)\Rightarrow\overrightarrow{AK}=(2t;t+1;-t-2)$

$AK\perp\Delta\Rightarrow\overrightarrow{AK}.\vec{u}=0\Leftrightarrow4t+t+1+t+2=0$

$\Rightarrow t=-\frac{1}{2}\Rightarrow K\left(0;-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right),\overrightarrow{AK}=\left(-1;\frac{1}{2};-\frac{3}{2}\right)$

Vậy phương trình $(Q):2x-y+3z+1=0$.

2. **Cách 1:** Tương tự như trên ta có $(Q):ax+by+(2a+b)z+a+b=0$

Gọi $\alpha=\widehat{((P),(R))}$, $0^0\leq\alpha\leq90^0$.

Ta có: $\cos\alpha=\frac{|2a-b+2(2a+b)|}{3\sqrt{a^2+b^2+(2a+b)^2}}=\frac{1}{3}\sqrt{\frac{b^2+12ba+36a^2}{2b^2+4ab+5a^2}}$.

Nếu $a=0\Rightarrow\cos\alpha=\frac{1}{3\sqrt{2}}$

Nếu $a\neq0$, đặt $t=\frac{b}{a}$ thì ta có: $\frac{b^2+12ba+36a^2}{2b^2+4ab+5a^2}=\frac{t^2+12t+36}{2t^2+4t+5}=f(t)$

Khảo sát hàm số $f(t)$ ta tìm được $\max f(t)=f\left(\frac{7}{10}\right)=\frac{53}{6}$

Suy ra $\max\{\cos\alpha\}$ đạt được khi $\frac{b}{a}=\frac{7}{10}$, chọn $b=-7\Rightarrow a=10$

Vậy phương trình $(R):10x-7y+13z+3=0$.

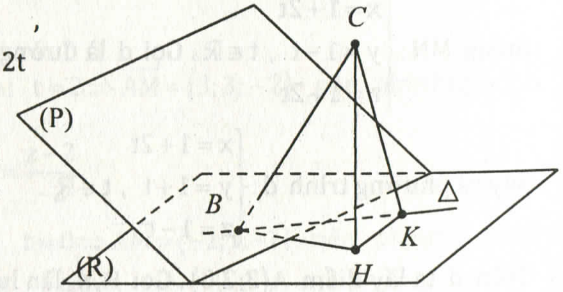
Cách 2: Gọi d là đường thẳng đi qua B và vuông góc với (P)

Ta có phương trình $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=-t\\z=-1+2t\end{cases}$,

lấy $C(3;-1;1)\in d$, $C\neq B$

Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của C lên (R) và Δ, khi đó $\alpha=\widehat{BCH}$ và

$\sin\alpha=\sin\widehat{BCH}=\frac{BH}{BC}\geq\frac{BK}{BC}$.



Mà $\frac{BK}{BC}$ không đổi, nên suy ra α nhỏ nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$ hay (R) là mặt phẳng đi qua Δ và vuông góc với mặt phẳng (BCK).

Mặt phẳng (BCK) đi qua Δ và vuông góc với (P) nên $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{n_P},\vec{u}\right]=(-1;6;4)$ là VTPT của (BCK).

Do (R) đi qua Δ và vuông góc với (BCK) nên $\overrightarrow{n_R}=\left[\overrightarrow{n_1},\vec{u}\right]=(10;-7;13)$ là VTPT của (R), suy ra phương trình của $(R): 10x-7y+13z+3=0$.

3. Cách 1: Giả sử phương trình mặt phẳng (α) có dạng: $ax+by+cz+d=0$

Do $M,N\in(\alpha)$ nên $\begin{cases}a+b+c+d=0\\-a+2b-c+d=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}d=-\dfrac{3}{2}b\\c=-a+\dfrac{1}{2}b\end{cases}$

Ta viết lại dạng phương trình của (α) như sau: $2ax+2by+(b-2a)z-3b=0$

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=(2a;2b;b-2a)$ là VTPT của (α). Gọi $\varphi=\widehat{(\Delta,(\alpha))}$

Ta có: $\sin\varphi=\dfrac{\left|\overrightarrow{n_\alpha}.\vec{u}\right|}{\left|\overrightarrow{n_\alpha}\right|.\left|\vec{u}\right|}=\dfrac{|4a+2b-b+2a|}{\sqrt{6}.\sqrt{4a^2+4b^2+(b-2a)^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{6}}\sqrt{\dfrac{b^2+12ab+36a^2}{5b^2-4ab+8a^2}}$

Nếu $a=0\Rightarrow\sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$, với $a\neq0$, đặt $t=\dfrac{b}{a}, t\in\mathbb{R}$

Xét hàm số $f(t)=\dfrac{t^2+12t+36}{5t^2-4t+8}$ ta tìm được $\max f(t)=f\left(\dfrac{5}{8}\right)=\dfrac{53}{9}$.

Do đó $\varphi_{\max}\Leftrightarrow\sin\varphi_{\max}\Leftrightarrow\dfrac{b}{a}=\dfrac{5}{8}$, chọn $b=5, a=8$

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x+10y-11z-15=0$.

Cách 2: Ta có: $\overrightarrow{NM}=(2;-1;2)$ là VTCP của MN, suy ra phương trình đường thẳng $MN:\begin{cases}x=1+2t\\y=1-t\\z=1+2t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$. Gọi d là đường thẳng đi qua M, song song với Δ.

Suy ra phương trình $d:\begin{cases}x=1+2t\\y=1+t\\z=1-t\end{cases}, t\in\mathbb{R}$

Trên d ta lấy điểm $A(3;2;0)$. Gọi H,K lần lượt là hình chiếu của A lên (α) và MN, khi đó $\widehat{((\alpha),\Delta)}=\widehat{ABH}$.

Ta có: $\cos\widehat{ABH}=\dfrac{BH}{BA}\geq\dfrac{BK}{BA}$, mà $\dfrac{BK}{BA}$ không đổi nên $\widehat{ABH}$ lớn nhất $\Leftrightarrow H\equiv K$

Hay (α) là mặt phẳng đi qua MN và vuông góc với mặt phẳng $(\beta)\equiv(MN,d)$

Ta có: $\overrightarrow{n_\beta}=\left[\overrightarrow{NM},\vec{u}\right]=(-1;6;4)$ là VTPT của (β)

Suy ra $\overrightarrow{n_\alpha}=\left[\overrightarrow{NM},\overrightarrow{n_\beta}\right]=(-16;-10;11)$ là VTPT của (α)

Vậy phương trình của $(\alpha): 16x+10y-11z-15=0$.

Ví dụ 4. Lập phương trình đường thẳng d đi qua $A(0;-1;2)$ và cắt đường thẳng $d': \dfrac{x+1}{2}=\dfrac{y}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$ sao cho:

1. Khoảng cách từ $B(2;1;1)$ đến đường thẳng d là lớn nhất, nhỏ nhất.

2. Khoảng cách giữa d và $\Delta: \dfrac{x-5}{2}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z}{1}$ là lớn nhất.

Lời giải

Giả sử d cắt d' tại điểm M thì $M(-1+2t;t;2-t), t\in\mathbb{R}$.

$\overrightarrow{AM}=(2t-1;t+1;-t)$ là VTCP của đường thẳng d.

1. Ta có $\overrightarrow{AB}=(2;2;-1)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]=(1-t;1;4-2t)$.

Khoảng cách từ điểm B đến đường thẳng d là

$$d(B,d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AM}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{AM}\right|}=\sqrt{\frac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}}=\sqrt{f(t)}$$

Ta có $f(t)=\dfrac{5t^2-18t+18}{6t^2-2t+2}$ nên $f'(t)=\dfrac{98t(t-2)}{(6t^2-2t+2)^2}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t)=f(0)=18, \min f(t)=f(2)=\dfrac{1}{11}$.

Do đó:

- $\min d(B,d)=\dfrac{1}{\sqrt{11}}$ đạt được khi $t=2\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(3;3;-2)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d: \dfrac{x}{3}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-2}{-2}$.
- $\max d(B,d)=3\sqrt{2}$ đạt được khi $t=0\Rightarrow\overrightarrow{AM}=(-1;1;-1)$ nên phương trình đường thẳng cần tìm $d: \dfrac{x}{-1}=\dfrac{y+1}{1}=\dfrac{z-2}{-1}$.

2. Δ đi qua $N(5;0;0)$ và có véc tơ chỉ phương $\overrightarrow{u_\Delta}=(2;-2;1)$.

Ta có $\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AM}\right]=(t-1;4t-1;6t)$, $\overrightarrow{AN}=(5;1;-2)$.

Khoảng cách giữa hai đường thẳng là:

$$d(\Delta;d)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AM}\right].\overrightarrow{AN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{AM}\right]\right|}=\frac{|-6-3t|}{\sqrt{(t-1))^2+(4t-1)^2+(6t)^2}}$$

$$=3.\sqrt{\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}}=3.\sqrt{f(t)},f(t)=\frac{(2+t)^2}{53t^2-10t+2}.$$

Vì $f'(t)=\frac{6(t+2)(4-37t)}{\left(53t^2-10t+2\right)^2}$ nên $f'(t)=0\Leftrightarrow t=-2,t=\frac{4}{37}$.

Từ đó ta tìm được $\max f(t)=f\left(\frac{4}{37}\right)$, khi đó $\overrightarrow{AM}=-\frac{1}{37}(29;-41;4)$.

Vậy đường thẳng d có phương trình là $d:\frac{x}{29}=\frac{y+1}{-41}=\frac{z-2}{4}$.

Dạng 6: Ứng dụng phương pháp tọa độ

Bước 1: Chọn hệ trục tọa Oxyz.

Xác định ba đường thẳng đồng quy và đôi một cắt nhau trên cơ sở có sẵn của hình (như tam diện vuông, hình hộp chữ nhật, hình chóp tứ giác đều ...), hoặc dựa trên các mặt phẳng vuông góc dựng thêm đường phụ.

Bước 2: Tọa độ hóa các điểm của hình không gian.

Tính tọa độ điểm liên quan trực tiếp đến giả thiết và kết luận của bài toán. Cơ sở tính toán chủ yếu dựa vào quan hệ song song, vuông góc cùng các dữ liệu của bài toán.

Bước 3: Chuyển giả thiết qua hình học giải tích.

Lập các phương trình đường, mặt liên quan. Xác định tọa độ các điểm, véc tơ cần thiết cho kết luận.

Bước 4: Giải quyết bài toán.

Sử dụng các kiến thức hình học giải tích để giải quyết yêu cầu của bài toán hình không gian.

Chú ý các công thức về góc, khoảng cách, diện tích và thể tích ...

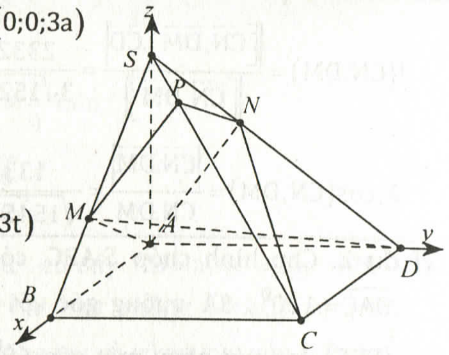
Cách chọn hệ tọa độ một số hình không gian.

Ví dụ 1. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình chữ nhật, cạnh bên SA vuông góc với đáy, $AB=a,AD=2a,SA=3a$. Gọi M,N lần lượt là hình chiếu của A lên SB, SD và P là giao điểm của SC với mặt phẳng (AMN).

1. Tính thể tích khối chóp S.AMPN .
2. Tính khoảng cách và côsin của góc giữa DM và CN.

Lời giải

1. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ. Ta có tọa độ các điểm



$A(0;0;0),B(a;0;0),D(0;2a;0),C(a;2a;0),S(0;0;3a)$

Suy ra $\overrightarrow{SB}=(a;0;-3a),\overrightarrow{SD}=(0;2a;-3a)$, $\overrightarrow{SC}=(a;2a;-3a)$

Phương trình SB: $\begin{cases}x=a+t\\y=0\\z=-3t\end{cases}\Rightarrow M(a+t;0;-3t)$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=(a+t;0;-3t)$

Mà $AM\perp SB\Rightarrow \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{SB}=0\Leftrightarrow(a+t)+9t=0\Rightarrow t=-\frac{a}{10}\Rightarrow M\left(\frac{9a}{10};0;\frac{3a}{10}\right)$

Tương tự ta tìm được $N\left(0;\frac{18a}{13};\frac{12a}{13}\right)$

Suy ra $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AN}\right]=-\frac{27a^2}{65}(1;2;-3)$

Do đó ta có phương trình của $(AMN):x+2y-3z=0$

Phương trình SC: $\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3a-3t\end{cases}$ nên tọa độ điểm P là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=t\\y=2t\\z=3a-3t\\x+2y-3z=0\end{cases}\Rightarrow x=\frac{9a}{14},y=\frac{9a}{7},z=\frac{15a}{14}\Rightarrow P\left(\frac{9a}{14};\frac{9a}{7};\frac{15a}{14}\right).$$

Ta có: $\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right]=-\frac{27a^2}{70}(1;2;-3)$, $\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP}\right]=\frac{27a^2}{91}(1;2;-3)$

Suy ra $S_{AMPN}=\frac{1}{2}\left[\left|\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AP}\right]\right|+\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{AP}\right]\right|\right]=\frac{621\sqrt{14}a^2}{1820}$ và $d(S,(AMN))=\frac{9a}{\sqrt{14}}$

Vậy $V_{S.AMPN}=\frac{1}{3}.\frac{9a}{\sqrt{14}}.\frac{621\sqrt{14}a^2}{1820}=\frac{1863a^3}{1820}$.

2. Ta có $\overrightarrow{CN}=\left(-a;-\frac{8a}{13};\frac{12a}{13}\right)$, $\overrightarrow{DM}=\left(\frac{9a}{10};-2a;\frac{3a}{10}\right)$, $\overrightarrow{CD}=(-a;0;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{DM}\right]=\left(\frac{348a^2}{65};\frac{147a^2}{130};\frac{426a^2}{65}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CD}=-\frac{348a^3}{65}$

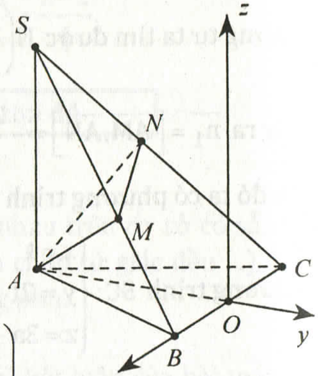
Khoảng cách giữa hai đường thẳng CN,DM là:

$$d(CN,DM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{DM}\right].\overrightarrow{CD}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{CN},\overrightarrow{DM}\right]\right|}=\frac{2332a}{3\sqrt{15209}}.$$

Và $\cos(CN,DM)=\frac{\left|\overrightarrow{CN}.\overrightarrow{DM}\right|}{CN.DM}=\frac{133}{\sqrt{154570}}$.

Ví dụ 2. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác cân AB = AC = a, $\widehat{BAC}=120^0$, SA vuông góc với mặt phẳng đáy. Hai mặt phẳng (SAB) và (SBC) tạo với nhau một góc 60^0. Gọi M,N lần lượt là trung điểm của các cạnh SB,SC. Tính thể tích khối chóp S.ABC và S.AMN.

Lời giải



Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, trong đó gốc tọa độ O là trung điểm cạnh BC.

Vì $\widehat{BAO}=\frac{1}{2}\widehat{BAC}=60^0$ nên $AO=AB\cos60^0=\frac{a}{2}$,

$BO=AB\sin60^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, đặt $SA=x,x>0$.

Ta có tọa độ các điểm là:

$A\left(0;-\frac{a}{2};0\right)$, $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $C\left(-\frac{a\sqrt{3}}{2};0;0\right)$, $S\left(0;-\frac{a}{2};x\right)$

Suy ra $\overrightarrow{SA}=(0;0;-x),\overrightarrow{AB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SA},\overrightarrow{AB}\right]=\left(-\frac{ax}{2};\frac{ax\sqrt{3}}{2};0\right)$

Nên $\overrightarrow{n_1}=\left(1;-\sqrt{3};0\right)$ là VTPT của (SAB)

$\overrightarrow{SB}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};\frac{a}{2};-x\right),\overrightarrow{BC}=\left(-a\sqrt{3};0;0\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{SB},\overrightarrow{BC}\right]=\left(0;ax\sqrt{3};\frac{a^2\sqrt{3}}{2}\right)$

Nên $\overrightarrow{n_2}=(0;2x;a)$ là VTPT của (SBC)

Theo đề bài $\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_2}\right|}=\cos60^0\Leftrightarrow\frac{\left|-2x\sqrt{3}\right|}{2.\sqrt{4x^2+a^2}}=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=\frac{a\sqrt{2}}{4}$.

Do đó $S\left(0;-\frac{a}{2};\frac{a\sqrt{2}}{4}\right)$

Vì $S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.AC.\sin\widehat{BAC}=\frac{1}{2}a.a.\sin120^0=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ nên thể tích khối chóp S.ABC

$V_{S.ABC}=\frac{1}{3}SA.S_{\Delta ABC}=\frac{1}{3}.\frac{a\sqrt{2}}{4}.\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=\frac{a^3\sqrt{6}}{48}$.

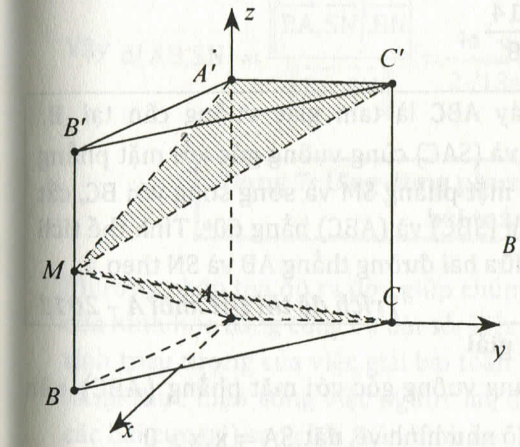
Ta có: $\frac{SM}{SB}=\frac{SA^2}{SB^2}=\frac{x^2}{a^2+x^2}=\frac{1}{9}$, $\frac{SN}{SC}=\frac{SA^2}{SC^2}=\frac{1}{9}$ nên

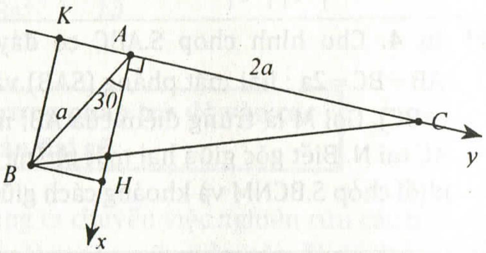
$V_{S.AMN}=\frac{SM}{SB}.\frac{SN}{SC}.V_{S.ABC}=\frac{1}{81}.\frac{a^3\sqrt{6}}{48}=\frac{a^3\sqrt{6}}{3888}$.

Ví dụ 3. Cho hình lăng trụ đứng ABC.A'B'C', có đáy $AB=a,AC=2a,=120^0$. Gọi M là trung điểm cạnh bên BB', biết hai mặt phẳng (MAC) và (MA'C') vuông góc với nhau. Tính thể tích khối lăng trụ và côsin của góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và (BCC'B')

Lời giải

Đặt $AA'=2x,x>0$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ





Ta có $A(0;0;0),C(0;2a;0),A'(0;0;2x),C'(0;2a;2x)$

Gọi H, K lần lượt là hình chiếu của B lên các trục Ox,Oy, suy ra

$AH=AB.\cos30^0=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, $AK=BH=AB.\sin30^0=\frac{a}{2}$

Do đó $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};0\right),B'\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};2x\right),M\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right)$

Ta có $\overrightarrow{AM}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};x\right),\overrightarrow{AC}=(0;2a;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AM},\overrightarrow{AC}\right]=\left(-2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow\overrightarrow{n_1}=\left(2x;0;-a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng (MAC)

$\overrightarrow{A'M}=\left(\frac{a\sqrt{3}}{2};-\frac{a}{2};-x\right),\overrightarrow{A'C'}=(0;2a;0)\Rightarrow\left[\overrightarrow{A'M},\overrightarrow{A'C'}\right]=\left(2ax;0;a^2\sqrt{3}\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_2} = \left(2x;0;a\sqrt{3}\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(MA'C')$

Vì $(MAC)\perp(MA'C')$ nên $\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_2} = 0 \Leftrightarrow 4x^2 - 3a^2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{a\sqrt{3}}{2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{3}$

Thể tích khối lăng trụ ABC.A'B'C' là:

$$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{\Delta ABC} = a\sqrt{3}.\frac{1}{2}a.2a.\sin 120^0 = \frac{3a^3}{2}$$

Ta có $\overrightarrow{CC'} = \left(0;0;a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BC} = \left(-\dfrac{a\sqrt{3}}{2};\dfrac{5a}{2};0\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{CC'},\overrightarrow{BC}\right] = \left(-\dfrac{5a^2\sqrt{3}}{2};-\dfrac{3a^2}{2};0\right)$

$\Rightarrow \overrightarrow{n_3} = \left(5;\sqrt{3};0\right)$ là VTPT của mặt phẳng $(BCC'B')$

Gọi α là góc giữa hai mặt phẳng (MAC) và $(BCC'B')$, ta có:

$$\cos\alpha = \frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\overrightarrow{n_3}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\overrightarrow{n_3}\right|} = \frac{5}{\sqrt{2}.\sqrt{28}} = \frac{5\sqrt{14}}{28}.$$

Ví dụ 4. Cho hình chóp S.ABC có đáy ABC là tam giác vuông cân tại B, $AB = BC = 2a$; hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC). Gọi M là trung điểm của AB; mặt phẳng SM và song song với BC, cắt AC tại N. Biết góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABC) bằng 60°. Tính thể tích khối chóp S.BCNM và khoảng cách giữa hai đường thẳng AB và SN theo a.

Trích đề thi ĐH khối A – 2011

Lời giải

Vì hai mặt phẳng (SAB) và (SAC) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABC) nên suy ra $SA\perp(ABC)$. Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ, đặt $SA = x, x > 0$

Vì $MN \,//\, BC \Rightarrow N$ là trung điểm cạnh AC

Tọa độ các đỉnh là:

$B(0;0;0)$, $A(2a;0;0)$, $C(0;2a;0)$,

$S(2a;0;x), M(a;0;0), N(a;a;0)$

Suy ra $\overrightarrow{BS} = (2a;0;x), \overrightarrow{BC} = (0;2a;0)$

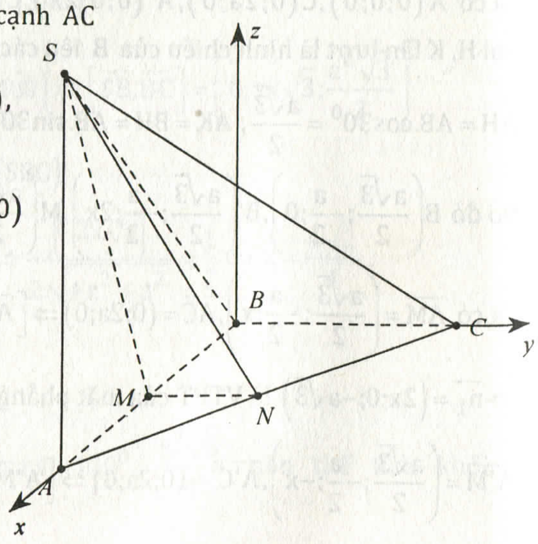
$\Rightarrow \left[\overrightarrow{BS},\overrightarrow{BC}\right] = \left(-2ax;0;4a^2\right)$

Do đó $\vec{n} = (x;0;-2a)$

là VTPT của mặt phẳng (SBC)

$\vec{k} = (0;0;1)$ là VTPT của

mặt phẳng (ABC)



Theo giả thiết ta có:

$$\frac{\left|\vec{n}.\vec{k}\right|}{\left|\vec{n}\right|.\left|\vec{k}\right|} = \cos 60^0 = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{2a}{\sqrt{x^2+4a^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x^2 = 12a^2 \Rightarrow x = 2a\sqrt{3}$$

Vì M, N là trung điểm của AB,CB nên $S_{\Delta AMN} = \dfrac{1}{4}S_{\Delta ABC} \Rightarrow S_{BMNC} = \dfrac{3}{4}S_{\Delta ABC} = \dfrac{3a^2}{2}$

Từ đó suy ra thể tích khối chóp S.BMNC là:

$$V_{S.BMNC} = \frac{1}{3}SA.S_{BMNC} = \frac{1}{3}.2a\sqrt{3}.\frac{3a^2}{2} = a^3\sqrt{3}$$

Ta có: $\overrightarrow{BA} = (2a;0;0), \overrightarrow{SN} = \left(-a;a;2a\sqrt{3}\right), \overrightarrow{BN} = (a;a;0)$

Suy ra $\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{SN}\right] = \left(0;-4\sqrt{3}a^2;2a^2\right) \Rightarrow \left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN} = -4\sqrt{3}a^3$

Vậy $d(AB,SN) = \dfrac{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{SN}\right].\overrightarrow{BN}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{BA},\overrightarrow{SN}\right]\right|} = \dfrac{4a^3\sqrt{3}}{2\sqrt{13}a^2} = \dfrac{2a\sqrt{39}}{13}$.

Dạng 7: Ứng dụng phương pháp tọa độ vào các bài toán đại số

Phương pháp tọa độ ra đời, giúp chúng ta chuyển việc nghiên cứu các tính chất của hình học bằng công cụ đại số. Việc làm này một phần nào đó đã làm giảm đi tính trừu tượng của việc giải bài toán hình học. Trong nhiều trường hợp chúng ta lại thực hiện công việc ngược lại, đó là chuyển một bài toán đại số (nhất là các bài cực trị) sang bài toán hình học và sử dụng các kết quả đã biết trong hình học để giải quyết. Nói cho cùng thì bản chất hai bài toán đó (bài toán đại số ban đầu và bài toán hình học sau khi chuyển) là một. Chúng chỉ được phát biểu dưới hai hình thức khác nhau. Nên để làm tốt phần này chúng ta cần nắm được ý nghĩa hình học của các biểu thức đại số. Chẳng hạn:

- Gặp biểu thức $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ thì ta liên tưởng đến đây chính là độ dài của véc tơ $\vec{u} = (a;b;c)$.
- Gặp biểu thức $\sqrt{(a-m)^2+(b-n)^2+(c-p)^2}$ thì ta liên tưởng đến độ dài của véc tơ $\vec{u} = (a-n;b-m;c-p)$ hoặc độ dài đoạn thẳng AB với $A(a;b;c), B(m;n;p)$.
- Gặp biểu thức $am+bn+cp$ ta liên tưởng đến tích vô hướng của hai véc tơ $\vec{u} = (a;b;c)$, $\vec{v} = (m;n;p)$.

- Gặp đẳng thức $ma+nb+pc+d=0$ thì ta liên tưởng đến phương trình mặt phẳng $(\alpha): mx+ny+cz+d=0$ và khi đó điểm $M(a;b;c)\in(\alpha)$.
- Gặp đẳng thức $(a-m)^2+(b-n)^2+(c-p)^2=k>0$ thì ta liên tưởng đến phương trình mặt cầu $(S):(x-m)^2+(y-n)^2+(z-p)^2=k$, khi đó điểm $M(a;b;c)\in(S)$.
- Gặp biểu thức $(x_1y_2-x_2y_1)^2+(y_1z_2-y_2z_1)^2+(z_1x_2-z_2x_1)^2$ thì ta liên tưởng đến $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|$ với $\vec{u}=(x_1;y_1;z_1),\vec{v}=(x_2;y_2;z_2)$.

Ngoài ra chúng ta cần biết một số kết quả của hình học

1. Các bất đẳng thức

- $\vec{u}_1.\vec{u}_2\le|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\cos(\vec{u}_1.\vec{u}_2)=1$, hay hai véc tơ $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ cùng hướng, tức là $\vec{u}_1=k\vec{u}_2\ (k>0)\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{y_2}=k>0$.

  Chuyển qua tọa độ ta có: $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\le\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.
- $\vec{u}_1.\vec{u}_2\ge-|\vec{u}_1|.|\vec{u}_2|$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi $\cos(\vec{u}_1.\vec{u}_2)=-1$, hay hai véc tơ $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ ngược hướng, tức là $\vec{u}_1=k\vec{u}_2\ (k<0)\Leftrightarrow\dfrac{x_1}{x_2}=\dfrac{y_1}{y_2}=\dfrac{z_1}{y_2}=k<0$.

  Chuyển qua tọa độ ta có: $x_1x_2+y_1y_2+z_1z_2\ge-\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}.\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}$.
- $\left|\left[\vec{u},\vec{v}\right]\right|\le|\vec{u}|.|\vec{v}|$, đẳng thức xảy ra khi $\sin(\vec{u},\vec{v})=1$.
- $|\vec{u}_1+\vec{u}_2|\le|\vec{u}_1|+|\vec{u}_2|$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ cùng hướng.

  Chuyển qua tọa độ ta có

  $$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\ge\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}$$
- $\left||\vec{u}_1|-|\vec{u}_1|\right|\le|\vec{u}_1+\vec{u}_2|$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi hai véc tơ $\vec{u}_1,\vec{u}_2$ ngược hướng. Chuyển qua tọa độ ta có:

  $$\left|\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}-\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}\right|\le\sqrt{(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2+(z_1+z_2)^2}$$
- $|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3|\le|\vec{u}_1|+|\vec{u}_2|+|\vec{u}_3|$, dấu đẳng thức có khi và chỉ khi ba véc tơ $\vec{u}_1,\vec{u}_2,\vec{u}_3$ cùng hướng.

  Chuyển qua tọa độ

  $$\sqrt{x_1^2+y_1^2+z_1^2}+\sqrt{x_2^2+y_2^2+z_2^2}+\sqrt{x_3^2+y_3^2+z_3^2}$$
  $$\ge\sqrt{(x_1+x_2+x_3)^2+(y_1+y_2+y_3)^2+(z_1+z_2+z_3)^2}$$

- Tổng quát cho bất đẳng thức tam giác:

  $|\vec{u}_1+\vec{u}_2+\vec{u}_3+...+\vec{u}_n|\le|\vec{u}_1|+|\vec{u}_2|+|\vec{u}_3|+...+|\vec{u}_n|$.
- Mặt cầu $S(I,R)$ có giao với mặt phẳng (α) (đường thẳng Δ) khi và chỉ khi $d(I,(\alpha))\le R$ ($d(I,\Delta)\le R$).

2. Cho ba điểm bất kì A,B,C khi đó ta có

a. $AB+BC\ge AC$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi B thuộc đoạn AC, hay hai véc tơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ cùng phương.

b. $|AB-AC|\le BC$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi C nằm trên đoạn AB hoặc B nằm trên đoạn AC.

3. Cho n điểm $A_1,A_2,...,A_n$, ta có: $A_1A_2+A_2A_3+...+A_{n-1}A_n\ge A_1A_n$. Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi A_i thuộc đoạn $A_{i-1}A_{i+1}$ với mọi $i=\overline{2,n-1}$.

4. Một số kết quả về các bài toán cực trị thường dùng

* **Kết quả 1:** Trong không gian Oxyz, cho các điểm $A(x_A;y_A;z_A),B(x_B;y_B;z_B)$ và mặt phẳng $(P): ax+by+cz+d=0$. Tìm điểm $M\in(P)$ sao cho

a. $MA+MB$ nhỏ nhất.

b. $|MA-MB|$ lớn nhất với $d(A,(P))\ne d(B,(P))$.

* **Phương pháp:**

- Xét vị trí tương đối của các điểm A,B so với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)>0$ thì hai điểm A,B cùng phía với mặt phẳng (P).
- Nếu $(ax_A+by_A+cz_A+d)(ax_B+by_B+cz_B+d)<0$ thì hai điểm A,B nằm khác phía với mặt phẳng (P).

a. $MA+MB$ nhỏ nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A,B ở khác phía so với mặt phẳng (P).

  Vì A,B ở khác phía so với mặt phẳng (P). nên $MA+MB$ nhỏ nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P).\cap AB$.
- Trường hợp 2: Hai điểm A,B ở cùng phía so với mặt phẳng (P).

  Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P). khi đó A' và B ở khác phía (P). và $MA=MA'$ nên $MA+MB=MA'+MB\ge A'B$.

  Vậy $MA+MB$ nhỏ nhất bằng $A'B$ khi $M=A'B\cap(P)$..

b. $|MA-MB|$ lớn nhất.

- Trường hợp 1: Hai điểm A,B ở cùng phía so với mặt phẳng (P)..

Vì A,B ở cùng phía so với mặt phẳng (P). nên $|MA-MB|$ lớn nhất bằng AB khi và chỉ khi $M=(P).\cap AB$.

- Trường hợp 2: Hai điểm A,B ở khác phía so với mặt phẳng (P)..

Gọi A' đối xứng với A qua mặt phẳng (P), khi đó A' và B ở cùng phía (P). và $MA=MA'$ nên $|MA-MB|=|MA'-MB|\le A'B$.

Vậy $|MA-MB|$ lớn nhất bằng A'B khi $M=A'B\cap(P)$.

* **Kết quả 2.** Cho mặt cầu (S) tâm I, bán kính R và mặt phẳng (α) không có điểm chung với (S). Gọi H là hình chiếu của I lên (α), IH cắt (S) tại M_1,M_2 (giả sử $HM_1<HM_2$. Khi đó với hai điểm $M\in(S),N\in(\alpha)$ ta luôn có:

$$HM_1\le MN\le HM_2.$$

* **Kết quả 3.** Cho hai mặt cầu $S_1(I_1;R_1)$, $S_2(I_2;R_2)$ không có điểm chung.

Đường thẳng I_1I_2 cắt (S_1) tại M_1,M_2 cắt (S_2) tại N_1,N_2

Đặt $m=\min\{M_1N_1,M_1N_2,M_2N_1,M_2N_2\},k=\max\{M_1N_1,M_1N_2,M_2N_1,M_2N_2\}$

Khi đó với mọi điểm $M\in(S_1),N\in(S_2)$ ta luôn có: $m\le MN\le k$.

* **Kết quả 4.** Trong một mặt cầu thì đường kính là dây cung có độ dài lớn nhất.

Ví dụ 1. Cho x,y,z là các số thực dương thay đổi thỏa mãn điều kiện $xyz=1$.

Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức:

$$P=\frac{x^2(y+z)}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{y^2(z+x)}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{z^2(x+y)}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$$

Đề thi Đại học khối A – năm 2007.

Lời giải

Ta có: $P\ge\dfrac{2x^2\sqrt{yz}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\dfrac{2y^2\sqrt{zx}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\dfrac{2z^2\sqrt{xy}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}$

$$=\frac{2x\sqrt{x}}{y\sqrt{y}+2z\sqrt{z}}+\frac{2y\sqrt{y}}{z\sqrt{z}+2x\sqrt{x}}+\frac{2z\sqrt{z}}{x\sqrt{x}+2y\sqrt{y}}.$$

Đặt $a=x\sqrt{x},b=y\sqrt{y},c=z\sqrt{z}\Rightarrow abc=1$

Ta có: $P\ge2\left(\dfrac{a}{b+2c}+\dfrac{b}{c+2a}+\dfrac{c}{a+2b}\right)$

Xét hai véc tơ

$$\vec{u}=\left(\sqrt{a(b+2c)};\sqrt{b(c+2a)};\sqrt{c(a+2b)}\right),\vec{v}=\left(\sqrt{\frac{a}{b+2c}};\sqrt{\frac{b}{c+2a}};\sqrt{\frac{c}{a+2b}}\right)$$

Áp dụng bất đẳng thức $|\vec{u}|^2.|\vec{v}|^2\ge(\vec{u}.\vec{v})^2$, ta có:

$$\left[a(b+2c)+b(c+2a)+c(a+2b)\right].\frac{P}{2}\ge(a+b+c)^2$$

Suy ra $P\ge\dfrac{2(a+b+c)^2}{3(ab+bc+ca)}\ge2$

(Ở đây ta đã sử dụng bất đẳng thức $(a+b+c)^2\ge3(ab+bc+ca)$)

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1\Leftrightarrow x=y=z=1$.

Vậy $\min P=2$.

Ví dụ 2. Cho a,b,c là các số thực dương thoả $ab+bc+ca\ge\dfrac{4}{3}$. Chứng minh rằng:

$$\sqrt{a^2+\frac{1}{(b+1)^2}+c^2}+\sqrt{b^2+\frac{1}{(c+1)^2}+a^2}+\sqrt{c^2+\frac{1}{(a+1)^2}+b^2}\ge\frac{\sqrt{281}}{5}$$

Lời giải

Gọi P là vế trái

Xét ba véc tơ: $\vec{u}=\left(a;\dfrac{1}{b+1};c\right),\vec{v}=\left(b;\dfrac{1}{c+1};a\right),\vec{w}=\left(c;\dfrac{1}{a+1};b\right)$

Áp dụng bất đẳng thức: $|\vec{u}|+|\vec{v}|+|\vec{w}|\ge|\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}|$, ta có:

$$P\ge\sqrt{2(a+b+c)^2+\left(\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}+\frac{1}{c+1}\right)^2}\ge\sqrt{2(a+b+c)^2+\frac{81}{(a+b+c+3)^2}}$$

Đặt $t=a+b+c\Rightarrow t\ge\sqrt{3(ab+bc+ca)}=2$

Xét hàm số $f(t)=2t^2+\dfrac{81}{(t+3)^2}$, $t\ge2$, có: $f'(t)=4t-\dfrac{162}{(t+3)^3}=\dfrac{2g(t)}{(t+3)^3}$

Trong đó: $g(t)=2t^4+18t^3+54t^2+54t-81>0,\ \forall t\ge2$. Suy ra $f'(t)\ge0,\ \forall t\ge2$

Do đó $f(t)\ge f(2)=\dfrac{281}{25},\ \forall t\ge2$. Vậy $P\ge\dfrac{\sqrt{281}}{5}$.

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=\dfrac{4}{9}$.

Ví dụ 3. Cho các số thực dương x,y,z thỏa $xyz=1$. Chứng minh rằng:

$$\frac{\sqrt{1+x^3+y^3}}{xy}+\frac{\sqrt{1+y^3+z^3}}{yz}+\frac{\sqrt{1+z^3+x^3}}{zx}\ge3\sqrt{3}$$

Lời giải

Gọi P là vế trái của bất đẳng thức cần chứng minh, ta có

$$P=\sqrt{\left(\frac{1}{xy}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{x}}{y}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{y}}{x}\right)^2}$$

$$+\sqrt{\left(\frac{1}{yz}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{y}}{z}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{z}}{y}\right)^2}+\sqrt{\left(\frac{1}{zx}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{z}}{x}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{x}}{z}\right)^2}$$

Xét ba véc tơ $\vec{a}=\left(\frac{1}{xy};\frac{\sqrt{x}}{y};\frac{\sqrt{y}}{x}\right),\vec{b}=\left(\frac{1}{yz};\frac{\sqrt{y}}{z};\frac{\sqrt{z}}{y}\right),\vec{a}=\left(\frac{1}{zx};\frac{\sqrt{z}}{x};\frac{\sqrt{x}}{z}\right)$. Khi đó :

$$P=\left|\vec{a}\right|+\left|\vec{b}\right|+\left|\vec{c}\right|\ge\left|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}\right|$$

$$=\sqrt{\left(\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{x}}{y}+\frac{\sqrt{y}}{z}+\frac{\sqrt{z}}{x}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{y}}{x}+\frac{\sqrt{z}}{y}+\frac{\sqrt{x}}{z}\right)^2}$$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta có: $\begin{cases}\frac{1}{xy}+\frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}\ge 3\frac{1}{\sqrt[3]{x^2y^2z^2}}=3\\ \frac{\sqrt{x}}{y}+\frac{\sqrt{y}}{z}+\frac{\sqrt{z}}{x}\ge\frac{3}{\sqrt[6]{xyz}}=3\\ \frac{\sqrt{y}}{x}+\frac{\sqrt{z}}{y}+\frac{\sqrt{x}}{z}\ge\frac{3}{\sqrt[6]{xyz}}=3\end{cases}$

Suy ra $P\ge\sqrt{9+9+9}=3\sqrt{3}$. Đẳng thức xảy ra khi $x=y=z=1$.

Ví dụ 4. Cho các số thực a,b,c thỏa $(a+1)^2+(b-2)^2+(c-3)^2=9$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=a^2+b^2+c^2-6a+4b+2c$.

Lời giải

Ta có $A+14=(a-3)^2+(b+2)^2+(c+1)^2$

Xét điểm $M(a;b;c)$, ta có M thuộc hai mặt cầu (S_1) tâm $I_1(-1;2;3)$, bán kính $R_1=3$ và mặt cầu (S_2) tâm $I_2(3;-2;1)$, bán kính $R_2=\sqrt{A+14}$, $I_1I_2=6$.

Vì a,b,c tồn tại nên $(S_1)\cap(S_2)\ne\varnothing\Leftrightarrow\begin{cases}I_1I_2\ge|R_1-R_2|\\ I_1I_2\le R_1+R_2\end{cases}$

Ta có: $I_1I_2\le R_1+R_2\Leftrightarrow\sqrt{A+14}\ge 3\Rightarrow A\ge -5$

$I_1I_2\ge|R_1-R_2|\Leftrightarrow R_2^2-6R_2-27\le 0\Leftrightarrow R_2\le 9\Leftrightarrow A\le 67$

- $A=-5\Leftrightarrow M$ là điểm tiếp xúc ngoài của (S_1) và (S_2),

  hay $\overrightarrow{I_1M}=-\overrightarrow{I_2M}$ nên M là trung điểm của $I_1I_2\Rightarrow M(1;0;2)$.

- $A=67\Leftrightarrow M$ là điểm tiếp xúc trong của (S_1) và (S_2), hay $\overrightarrow{I_1M}=\frac{R_1}{R_2}\overrightarrow{I_2M}=\frac{1}{3}\overrightarrow{I_2M}$

Từ đó ta tìm được $M(-3;4;4)$.

Vậy: $\max A=67$ đạt được khi $a=-3,b=c=4$.

$\min A=-5$ đạt được khi $a=1,b=0,c=2$.

Ví dụ 5. Cho các số thực a,b,c thỏa $\begin{cases}a^2+b^2+c^2\le 25\\ 2a+2b-c\ge 12\end{cases}$. Tìm giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất của biểu thức: $A=2a-b+2c$

Lời giải

- Gọi mặt phẳng $(\alpha):2x+2y-z-12=0$, mặt cầu (S) tâm $O(0;0;0),R=5$ và họ mặt phẳng $(\beta_m):2x-y+2z-m=0$.

  Mặt phẳng (α) chia không gian thành hai phần. Gọi (K) là phần không chứa điểm O, (T) là phần giao của khối cầu $(O;R)$ với (K).

  Vì $d(O,(\alpha))=4<R$ nên $(T)\ne\varnothing$.

  Xét $M(a;b;c)$, khi đó ta có M thuộc (T). Ta đi tìm m sao cho (β) và phần không gian (T) có giao khác rỗng.

  Mặt phẳng (β_m) tiếp xúc với mặt cầu $(S)\Leftrightarrow d(O,(\beta_m))=5\Leftrightarrow m=\pm 15$

  Gọi M là điểm tiếp xúc, ta có $OM\perp(\beta_m)\Rightarrow M(2t;-t;2t)$

  Mà $M\in(\beta_m)$ nên $t=\frac{m}{9}\Rightarrow M\left(\frac{2m}{9};-\frac{m}{9};\frac{2m}{9}\right)$

  Với $m=15$ ta có điểm $M_1\left(\frac{10}{3};-\frac{5}{3};\frac{10}{3}\right)$, với $m=-15$ ta có điểm $M_2\left(-\frac{10}{3};\frac{5}{3};-\frac{10}{3}\right)$.

  Vì cả hai điểm M_1,M_2 đều không thuộc phần không gian (T), nên trong hai trường hợp $m=\pm 15$ thì (β_m) và phần không gian (T) có giao bằng $\varnothing$.

- Gọi (Δ) là giao tuyến của (α) và (β_m), suy ra $\overrightarrow{u_\Delta}=\frac{1}{3}\left[\overrightarrow{n_\alpha},\overrightarrow{n_{\beta_m}}\right]=(1;-2;-2)$ là VTCP của Δ và điểm $N\left(\frac{m+6}{3};\frac{12-m}{3};0\right)\in\Delta$.

  Gọi đường tròn (C) là giao tuyến của (α) với mặt cầu (S), suy ra (C) có bán kính $r=3$ và tâm I là hình chiếu của (O) lên $(\alpha)\Rightarrow I\left(\frac{8}{3};\frac{8}{3};-\frac{4}{3}\right)$

  Suy ra $\overrightarrow{IN}=\left(\frac{m-2}{3};\frac{4-m}{3};\frac{4}{3}\right)\Rightarrow\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{IN}\right]=\left(\frac{2m}{3};-\frac{2m}{3};\frac{m}{3}\right)$

  Nên $d(I,\Delta)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{u_\Delta},\overrightarrow{IN}\right]\right|}{\left|\overrightarrow{u_\Delta}\right|}=\frac{|m|}{3}$. Suy ra Δ tiếp xúc với $(C)\Leftrightarrow d(I,\Delta)=r\Leftrightarrow m=\pm 9$

- $m=9 \Rightarrow$ phương trình $\Delta:\begin{cases}x=5+t\\ y=1-2t\\ z=-2t\end{cases}$, gọi E là tiếp điểm của (C) với Δ, suy ra

$E(5+t;1-2t;-2t) \Rightarrow \overrightarrow{IE}=\left(t+\frac{7}{3};-2t-\frac{5}{3};-2t+\frac{4}{3}\right)$

Vì $IE \perp \Delta \Rightarrow \overrightarrow{IE}.\overrightarrow{u_\Delta}=0 \Leftrightarrow t+\frac{7}{3}+2\left(2t+\frac{5}{3}\right)+2\left(2t-\frac{4}{3}\right)=0 \Leftrightarrow t=\frac{1}{3} \Rightarrow E\left(\frac{16}{3};\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$

- $m=-9$, tương tự ta tìm được $F\left(\frac{2}{3};\frac{11}{3};-\frac{10}{3}\right)$ là hình chiếu của I lên Δ.

Từ đó suy ra $(\beta_m)\cap(T)\neq\varnothing \Leftrightarrow -9\le m\le 9$, suy ra $-9\le A\le 9$

Vậy: $\min A=-9$ đạt được khi $a=\frac{2}{3},b=\frac{11}{3},c=-\frac{10}{3}$;

$\max A=9$ đạt được khi $a=\frac{16}{3},b=\frac{1}{3},c=-\frac{2}{3}$.

Ví dụ 6.

1. Giải phương trình: $\sqrt{13-x}+2\sqrt{x-2}=11-\sqrt{6x}$.

2. Giải bất phương trình: $x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x}\ge 2\sqrt{x^2+1}$

Lời giải

1. Điều kiện : $2\le x\le 7$

Xét hai véc tơ $\vec{a}=\left(1;2;\sqrt{6}\right),\vec{b}=\left(\sqrt{13-2x};\sqrt{x-2};\sqrt{x}\right)$, khi đó $\left|\vec{a}\right|=\sqrt{11},\left|\vec{b}\right|=\sqrt{11}$

Và $\vec{a}.\vec{b}=\sqrt{13-2x}+2\sqrt{x-2}+\sqrt{6x}$ nên phương trình đã cho có dạng

$\vec{a}.\vec{b}=\left|\vec{a}\right|.\left|\vec{b}\right| \Leftrightarrow \vec{a}=k.\vec{b},\ k>0 \Leftrightarrow \frac{\sqrt{7-x}}{1}=\frac{\sqrt{x-2}}{2}=\sqrt{\frac{x}{6}} \Leftrightarrow x=6$

Vậy $x=6$ là nghiệm của phương trình đã cho.

2. Điều kiện $-1\le x\le 3$

Xét hai véc tơ $\vec{u}=(x;1;0),\vec{v}=\left(\sqrt{x+1};\sqrt{3-x};0\right)$, ta có:

$\vec{u}.\vec{v}=x\sqrt{x+1}+\sqrt{3-x};\ \left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|=2\sqrt{x^2+1}$

Nên bất phương trình đã cho có dạng: $\vec{u}.\vec{v}\ge\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ (1)

Mặt khác ta luôn có $\vec{u}.\vec{v}\le\left|\vec{u}\right|.\left|\vec{v}\right|$ nên (1) xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\vec{u}=k.\vec{v}\\ k>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \frac{x}{1}=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{3-x}} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^2(3-x)=x+1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge 0\\ x^3-3x^2+x+1=0\end{cases} \Leftrightarrow x=1,x=1+\sqrt{2}$.

Vậy $x=1,x=1+\sqrt{2}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

Bài tập tự luyện

1. Chứng minh rằng các véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng và phân tích véc tơ $\vec{u}=(3;7;-14)$ qua ba vectơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Ta có: $\left[\vec{a},\vec{b}\right]=(-3;-8;-6)\Rightarrow\left[\vec{a},\vec{b}\right].\vec{c}=3+16=19\neq 0$

Nên ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

Cách 2. Giả sử ba véc tơ $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ đồng phẳng. Khi đó tồn tại hai số thực x,y sao cho

$\vec{a}=x.\vec{b}+y.\vec{c}$ (1)

Mà $x\vec{b}+y\vec{c}=(-y;-3x-2y;4x)$ nên (1) $\Leftrightarrow\begin{cases}-y=2\\ -3x-2y=3\\ 4x=-5\end{cases}$ hệ này vô nghiệm.

Vậy $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ không đồng phẳng.

Giả sử $\vec{u}=m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}$ (2)

Do $m\vec{a}+n\vec{b}+p\vec{c}=(2m-p;3m-3n-2p;-5m+4n)$ nên (2) tương đương với

$\begin{cases}2m-p=3\\ 3m-3n-2p=7\\ -5m+4n=-14\end{cases}\Leftrightarrow m=2,n=-1,p=1$. Vậy $\vec{u}=2\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$.

2. Cho hình chóp S.ABCD với điểm $A(4;-1;2)$, $B(-1;0;-1)$ và $C(0;0;-2)$, $D(10;-2;4)$. Gọi M là trung điểm của CD. Biết SM vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$ và thể tích khối chóp $V_{S.ABCD}=66$ (đvtt). Tìm tọa độ đỉnh S.

Hướng dẫn giải

Ta có $\overrightarrow{AB}(-5;1;-3),\overrightarrow{DC}(-10;2;-6)\Rightarrow\overrightarrow{DC}=2.\overrightarrow{AB}$ nên ABCD là hình thang và

$S_{ADC}=2S_{ABC}$, hay $S_{ABCD}=3S_{ABC}$.

Vì $\overrightarrow{AB}(-5;1;-3),\overrightarrow{AC}(-4;1;-4)$ nên $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-1;-8;-1)$, do đó

$S_{ABC}=\frac{1}{2}\left|\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\right|=\frac{\sqrt{66}}{2}\Rightarrow S_{ABCD}=\frac{3\sqrt{66}}{2}$ (đvdt).

Chiều cao của khối chóp là $SM=\frac{3V_{S.ABCD}}{S_{ABCD}}=2\sqrt{66}$.

Vì $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\perp\overrightarrow{AB},\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]\perp\overrightarrow{AC}$ nên giá của véc tơ $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]$ vuông góc với mặt phẳng $(ABCD)$, mà $SM\perp(ABCD)$ nên tồn tại số thực k sao cho:

$\overrightarrow{SM}=k.\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right]=(-k;-8k;-k)$.

Suy ra $2\sqrt{66}=\left|\overrightarrow{SM}\right|=\sqrt{(-k)^2+(-8k)^2+(-k)^2}\Leftrightarrow|k|=2\Leftrightarrow k=\pm2$.

M là trung điểm CD nên $M(5;-1;1)\Rightarrow\overrightarrow{SM}(5-x_S;-1-y_S;1-z_S)$.

- Nếu $k=2$ thì $\overrightarrow{SM}=(5-x_S;-1-y_S;1-z_S)=(-2;-16;-2)$ nên tọa độ của điểm S là $S(7;15;3)$.
- Nếu $k=-2$ thì $\overrightarrow{SM}=(5-x_S;-1-y_S;1-z_S)=(2;16;2)$ nên tọa độ của điểm S là $S(3;-17;-1)$.

Vậy tọa độ các điểm S cần tìm là $S(7;15;3)$ hoặc $S(3;-17;-1)$.

3. Lập phương trình mặt phẳng (α), biết:

a. (α) đi qua $A(-1;1;1),B(3;0;2)$ và khoảng cách từ $C(1;0;-2)$ đến (α) bằng 2;

b. (α) đi qua giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q), đồng thời (α) vuông góc với mặt phẳng $(\beta):3x+2y-z+5=0$.

c. (α) đi qua $A(1;-1;1),B(2;0;3)$ và (α) song song với Ox,

d. (α) đi qua $M(3;0;1)$, $N(6;-2;1)$ và (α) tạo với (Oyz) một góc φ thỏa $\cos\varphi=\frac{2}{7}$.

Hướng dẫn giải

a. Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$a(x+1)+b(y-1)+c(z-1)=0$ (1)

Do $B\in(\alpha)$ nên ta có: $4a-b+c=0\Rightarrow b=4a+c$

Mặt khác $d(C,(\alpha))=2\Leftrightarrow\frac{|2a-b-3c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=2\Leftrightarrow\frac{|2a+4c|}{\sqrt{a^2+(4a+c)^2+c^2}}=2$

$\Leftrightarrow(a+2c)^2=17a^2+8ac+2c^2\Leftrightarrow8a^2+2ac-c^2=0\Leftrightarrow c=-2a,c=4a$

- $c=-2a$ ta chọn $a=1\Rightarrow c=-2,b=2$ nên phương trình $(\alpha):x+2y-2z+1=0$
- $c=4a$ ta chọn $a=1\Rightarrow c=4,b=8$ nên phương trình $(\alpha):x+8y+4z-11=0$.

b. Gọi E,F là hai điểm nằm trên giao tuyến của hai mặt phẳng (P) và (Q). Khi đó tọa độ của E,F là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x+y+2z-1=0\\x-2y+2z-4=0\end{cases}$ (*)

Cho $x=0$, từ (*) ta có $y=-1,z=1\Rightarrow E(0;-1;1)$

Cho $x=6$, từ (*) ta có $y=-3,z=-4\Rightarrow F(6;-3;-4)$

Suy ra $\overrightarrow{EF}=(6;-2;-5)$.

Vì (α) đi qua E,F và vuông góc với (β) nên (α) nhận $\vec{n}=\left[\overrightarrow{EF},\vec{a}\right]$ làm VTPT

Trong đó $\vec{a}=(3;2;-1)$ là VTPT của (β) nên $\vec{n}=(12;-9;18)$

Vậy phương trình của $(\alpha):4x-3y+6z-9=0$.

c. Vì (α) song song với Ox nên phương trình của (α) có dạng: $ay+bz+c=0$

Do $A,B\in(\alpha)$ nên ta có: $\begin{cases}-a+b+c=0\\3b+c=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}c=-3b\\a=-2b\end{cases}$, chọn $b=-1\Rightarrow a=2,c=3$

Vậy phương trình của $(\alpha):2y-z+3=0$.

d. Vì $M\in(\alpha)$ nên phương trình của (α) có dạng:

$a(x-3)+by+c(x-1)=0\Leftrightarrow ax+by+cx-3a-c=0$ (1)

Do $N\in(\alpha)\Rightarrow3a-2b=0\Rightarrow b=\frac{3}{2}a$

Mặt khác $\cos\varphi=\frac{2}{7}$ và $\vec{i}=(1;0;0)$ là VTPT của (Oyz) nên ta có:

$$\frac{|a|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\frac{2}{7}\Leftrightarrow49a^2=4\left[a^2+\frac{9}{4}a^2+c^2\right]=13a^2+4c^2\Leftrightarrow c=\pm3a$$

Ta chọn $a=2\Rightarrow b=3,c=\pm6$.

Từ đó ta có phương trình của (α) là: $2x+3y+6z-12=0$ hoặc $2x+3y-6z=0$.

4. Trong không gian Oxyz cho bốn điểm A(1; 2; 3), B(−2; 3 −1), C(0; 1; 1), D(−4; −3; 5). Lập phương trình mặt phẳng (α) biết: (α) đi qua A,B và cách đều hai điểm C,D.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Vì (α) cách đều C,D nên ta có hai trường hợp:

TH1: $CD//(\alpha)$, khi đó $\left[\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CD}\right]=\vec{n}$ là VTPT của (α)

Mà $\overrightarrow{AB}=(-3;1;-4)$, $\overrightarrow{CD}=(-4;-4;4)\Rightarrow\vec{n}=(-12;28;16)$

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $3x-7y-4z+23=0$

TH 2: $CD\cap(\alpha)=\{I\}$, khi đó ta có được I là trung điểm của CD, suy ra $I(-2;-1;3)$

Mặt phẳng (α) đi qua A,B,I.

Ta có $\overrightarrow{AI}=(-3;-3;0),\overrightarrow{BI}=(0;-4;4)\Rightarrow\left[\overrightarrow{AI},\overrightarrow{BI}\right]=(-12;12;12)$

Trường hợp này ta có phương trình của (α) là: $x-y-z+4=0$.

Cách 2: Vì (α) đi qua A nên phương trình của (α) có dạng:

$a(x-1)+b(y-2)+c(z-3)=0\Leftrightarrow ax+by+cz-a-2b-3c=0$ (*)

Do $B\in(\alpha)$ nên $-3a+b-4c=0\Rightarrow b=3a+4c$ (1)

Mặt khác: $d\left(C,(\alpha)\right)=d\left(D,(\alpha)\right)$ nên ta có: $\dfrac{|-a-b-2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}=\dfrac{|-5a-5b+2c|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a+b+2c=5a+5b-2c \\ a+b+2c=-5a-5b+2c \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4a+3c=0 \\ a+c=0 \end{array}\right.$$

- $4a+3c=0$ ta chọn $c=-4 \Rightarrow a=3, b=-7$, suy ra phương trình (α) là:

$$3x-7y-4z+23=0.$$

- $a+c=0$ ta chọn $c=-1 \Rightarrow a=1, b=-1$, suy ra phương trình của (α) là:

$$x-y-z+4=0.$$

5. Cho $(P): x-y+z+1=0$ và ba điểm $A(1;1;1), B(0;1;2), C(-2;0;1)$. Tìm $N \in (P)$ sao cho $S=2NA^2+NB^2+NC^2$ nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ (*)

Ta có: $2\overrightarrow{IA}=(2-2x;2-2y;2-2z)$, $\overrightarrow{IB}=(-x;1-y;2-z)$, $\overrightarrow{IC}=(-2-x;-y;1-z)$

Nên $(*) \Leftrightarrow \begin{cases} -4x=0 \\ 3-4y=0 \\ 5-4z=0 \end{cases} \Leftrightarrow x=0, y=\dfrac{3}{4}, z=\dfrac{5}{4}$. Suy ra $I\left(0;\dfrac{3}{4};\dfrac{5}{4}\right)$

Khi đó: $2\overrightarrow{NA}^2=2\left(\overrightarrow{NI}+\overrightarrow{IA}\right)^2=2NI^2+2IA^2+4\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IA}$

$\overrightarrow{NB}^2=NI^2+IB^2+2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IB}$; $\overrightarrow{NC}^2=NI^2+IC^2+2\overrightarrow{NI}.\overrightarrow{IC}$

Do đó $S=4NI^2+2IA^2+IB^2+IC^2+2\overrightarrow{NI}\left(2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}\right)=4NI^2+2IA^2+IB^2+IC^2$

Do $2IA^2+IB^2+IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất khi và chỉ khi NI nhỏ nhất hay N là hình chiếu của I lên mặt phẳng (P).

Gọi $N(x;y;z) \Rightarrow \overrightarrow{IN}=\left(x;y-\dfrac{3}{4};z-\dfrac{5}{4}\right)$, $\vec{n}=(1;-1;1)$ là VTPT của (P)

Vì $N \in (P) \Rightarrow x-y+z+1=0$ (1)

Do $IN \perp (P)$ nên $\overrightarrow{IN}=k\vec{n} \Rightarrow \begin{cases} x=k \\ y=\dfrac{3}{4}+k \\ z=\dfrac{5}{4}+k \end{cases}$ thay vào (1), ta có được:

$$k-\left(\frac{3}{4}+k\right)+\left(\frac{5}{4}+k\right)+1=0 \Leftrightarrow k=-\frac{3}{2} \Rightarrow x=-\frac{3}{2}, y=-\frac{3}{4}, z=-\frac{1}{4}$$

Vậy $N\left(-\dfrac{3}{2};-\dfrac{3}{4};-\dfrac{1}{4}\right)$.

6. Lập phương trình của đường thẳng Δ biết:

a. Δ đi qua $B(9;0;-1)$, đồng thời Δ cắt hai đường thẳng

$$\Delta_1: \frac{x-1}{2}=\frac{y-3}{-1}=\frac{z+1}{1},\ \Delta_2: \frac{x+2}{-1}=\frac{y-3}{1}=\frac{z-4}{-3}$$

b. Δ đi qua $A(2;3;-1)$ và cắt d tại điểm B sao cho $d\left(B,(\alpha)\right)=2\sqrt{3}$, biết $(\alpha): x+y+z-1=0$.

Hướng dẫn giải

a. Đường thẳng Δ_1 đi qua $C(1;3;-1)$ và có $\overrightarrow{v_1}=(2;-1;1)$ là VTCP

Đường thẳng Δ_2 đi qua $D(-2;3;4)$ và có $\overrightarrow{v_2}=(-1;1;-3)$ là VTCP

Gọi (α) là mặt phẳng đi qua B và Δ_1, suy ra $\Delta \subset (\alpha)$ và $\overrightarrow{n_1}=\left[\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{BC}\right]=(-3;-8;-2)$ là VTPT của (α).

Gọi (β) là mặt phẳng đi qua B và Δ_2, suy ra $\Delta \subset (\beta)$ và $\overrightarrow{n_2}=\left[\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{BD}\right]=(14;38;8)$ là VTPT của (β).

Ta có Δ là giao tuyến của (α) và (β) nên $\vec{a}=\left[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}\right]=(12;-4;-2)$ là VTCP

Vậy phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là: $\dfrac{x-9}{6}=\dfrac{y}{-2}=\dfrac{z+1}{-1}$

b. Vì $B \in d \Rightarrow B(1+t;2+2t;-t)$, khi đó

$$d\left(B,(\alpha)\right)=\frac{|2t+2|}{\sqrt{3}}=2\sqrt{3} \Leftrightarrow |t+1|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-4 \end{array}\right.$$

- $t=2 \Rightarrow B(3;6;-2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(1;3;-1)$, suy ra phương trình AN,CM là:

$$\frac{x-3}{1}=\frac{y-6}{3}=\frac{z+2}{-1}.$$

- $t=-2 \Rightarrow B(-3;-6;2) \Rightarrow \overrightarrow{AB}=(-5;-9;3)$, suy ra phương trình Δ là:

$$\frac{x+3}{-5}=\frac{y+6}{-9}=\frac{z-2}{3}.$$

7. Lập phương trình mặt cầu $S(I,R)$:

a. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $\Delta: \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+1}{-2}$ và tiếp xúc với mặt phẳng $(\alpha_1): 3x+2y+z-6=0$ và mặt phẳng $(\alpha_2): 2x+3y+z=0$.

b. Mặt cầu có tâm thuộc đường thẳng $d: \dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y}{-1}=\dfrac{z-3}{2}$, đi qua $M(1;1;4)$ và tiếp xúc với $d': \dfrac{x+2}{1}=\dfrac{y+2}{1}=\dfrac{z-4}{-4}$.

Hướng dẫn giải

a. Vì tâm $I\in\Delta$ nên $I(-2+t;1+2t;-1-2t)$.

Mặt cầu tiếp xúc với hai mặt phẳng (α_1) và (α_2) nên: $d(I,(\alpha_1))=d(I,(\alpha_2))=R$

Suy ra $\dfrac{|3(-2+t)+2(1+2t)-1-t-6|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\dfrac{|2(-2+t)+3(1+2t)-1-t|}{\sqrt{2^2+3^2+1^2}}$

$$\Leftrightarrow |6t-11|=|7t-2| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}6t-11=7t-2\\6t-11=2-7t\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-9\\t=1\end{array}\right.$$

- Nếu $t=1$ thì $I(-1;3;-3), R=\dfrac{5}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

$$(x+1)^2+(y-3)^2+(z+3)^2=\frac{25}{14}.$$

- Nếu $t=-9$ thì $I(-11;-17;17), R=\dfrac{65}{\sqrt{14}}$ nên phương trình mặt cầu

$$(x+11)^2+(y+17)^2+(z-17)^2=\frac{4225}{14}.$$

b. Đường thẳng d' qua điểm $N(-2;-2;4)$ và có $\overrightarrow{u_{d'}}=(1;1;-4)$ là VTCP

Vì tâm mặt cầu $I\in d$ nên $I(2+t;-t;3+2t)$

Ta có $\overrightarrow{MI}=(t+1;-t-1;2t-1), \overrightarrow{NI}=(4+t;2-t;-1+2t)$ nên

$\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]=(2t-7;6t+15;2t+2)$.

Vì mặt cầu qua điểm M và tiếp xúc với d' nên $MI=d(I,d')=R$.

Do đó $MI=\dfrac{\left|\left[\overrightarrow{NI},\vec{u}_{d'}\right]\right|}{|\vec{u}_{d'}|}$, hay

$$\sqrt{(2t-1)^2+2(1+t)^2}=\frac{\sqrt{(2t-7)^2+(6t+15)^2+(2t+2)^2}}{\sqrt{1^2+1^2+4^2}}$$

$$\Leftrightarrow 18\left(6t^2+3\right)=44t^2+160t+278 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=-1\\t=\dfrac{7}{2}\end{array}\right.$$

- Với $t=-1$ thì $I(1;1;1), R=\sqrt{9}$ nên phương trình mặt cầu

$$(x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2=9$$

- Với $t=\dfrac{7}{2}$ thì $I\left(\dfrac{11}{2};-\dfrac{7}{2};10\right), R=\dfrac{3\sqrt{34}}{2}$ nên phương trình mặt cầu

$$\left(x-\frac{11}{2}\right)^2+\left(y+\frac{7}{2}\right)^2+(z-10)^2=\frac{153}{2}.$$

8. Trong không gian cho ba điểm $A(1;2;3), B(-1;0;-3), C(2;-3;-1)$

a. Tìm M thuộc mặt phẳng $(\alpha): 2x+y-2z-1=0$ sao cho biểu thức sau nhỏ nhất

$S=3MA^2+4MB^2-6MC^2$

b. Tìm M thuộc đường thẳng $\Delta: \dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y+1}{3}=\dfrac{z-1}{-1}$ sao cho biểu thức sau lớn nhất: $P=\left|\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}\right|$

c. Tìm M thuộc mặt cầu $(S): (x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=36$ sao cho biểu thức $F=MA^2-4MB^2+2MC^2$ đạt giá trị lớn nhất, giá trị nhỏ nhất.

Hướng dẫn giải

a. Cách 1:

Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}=\vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{IA}=6\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA}=(1-x;2-y;3-z), 6\overrightarrow{AC}=(6;-30;-24), 4\overrightarrow{AB}=(-8;-8;-24)$

$$\text{Do đó } (*) \Leftrightarrow \begin{cases}1-x=6+8\\2-y=-30+8\\3-z=-24+24\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-13\\y=24\\z=3\end{cases} \Rightarrow I(-13;24;3)$$

$$\text{Khi đó: } S=3\overrightarrow{MA}^2+4\overrightarrow{MB}^2-6\overrightarrow{MC}^2=3\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}\right)^2+4\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)^2-6\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)^2$$

$$=IM^2+2\overrightarrow{MI}\left(3\overrightarrow{IA}+4\overrightarrow{IB}-6\overrightarrow{IC}\right)+3IA^2+4IB^2-6IC^2$$

$$=IM^2+3IA^2+4IB^2-6IC^2.$$

Do $3IA^2+4IB^2-6IC^2$ không đổi nên S nhỏ nhất $\Leftrightarrow IM$ nhỏ nhất

$\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên (α). Ta có $IM\perp(\alpha)\Rightarrow IM: \begin{cases}x=-13+2t\\y=24+t\\z=3-2t\end{cases}$

Tọa độ của M là nghiệm của hệ: $\begin{cases}x=-13+2t\\y=24+t\\z=3-2t\\2x+y-2z-1=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-11\\y=25\\z=1\end{cases}$

Vậy $M(-11;25;1)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Gọi $M(a;b;c)\in(\alpha)\Rightarrow 2a+b-2c-1=0$

Suy ra: $3MA^2=3a^2+3b^2+3c^2-6a-12b-18c+42$

$4MB^2=4a^2+4b^2+4c^2+8a+24c+40$

$6MC^2=6a^2+6b^2+6c^2-24a+36b+12c+84$

Suy ra $S=a^2+b^2+c^2+26a-48b-6c-2$

$=(a+11)^2+(b-25)^2+(c-1)^2+4a+2b-4c-749\ge 2(2a+b-2c-1)-747\ge -747$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=-11,b=25,c=1$ hay $M(-11;25;1)$ là điểm cần tìm.

b. Cách 1: Gọi $I(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{IA}-7\overrightarrow{IB}+5\overrightarrow{IC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{IA}=-7\overrightarrow{AB}+5\overrightarrow{AC}$ (*)

Mà $\overrightarrow{IA}=(1-x;2-y;3-z)$, $-7\overrightarrow{AB}=(14;14;42)$, $5\overrightarrow{AC}=(5;-25;-20)$

Nên (*) $\Leftrightarrow\begin{cases}1-x=14+5\\2-y=14-25\\3-z=42-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-18\\y=13\\z=-19\end{cases}\Rightarrow I((-18;13;-19)$

Khi đó: $P=\left|\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}-7\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB}\right)+5\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IC}\right)\right|=MI$

Do đó P nhỏ nhất $\Leftrightarrow MI$ nhỏ nhất $\Leftrightarrow M$ là hình chiếu của I lên Δ

$M\in\Delta\Rightarrow M(1+2t;-1+3t;1-t)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(2t+19;3t-14;-t+20)$

Vì $IM\perp\Delta\Rightarrow 2(2t+19)+3(3t-14)-(-t+20)=0\Leftrightarrow t=\frac{12}{7}$

Vậy $M\left(\frac{31}{7};\frac{29}{7};-\frac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

Cách 2: Ta có $M\in\Delta\Rightarrow M(1+2t;-1+3t;1-t)$

Suy ra $\overrightarrow{MA}=(-2t;3-3t;2+t)$, $-7\overrightarrow{MB}=(14+14t;-7+21t;28-7t)$

$5\overrightarrow{MC}=(5-10t;-10-15t;-10+5t)$

Do đó $\overrightarrow{MA}-7\overrightarrow{MB}+5\overrightarrow{MC}=(2t+19;3t-14;-t+20)$

Nên $P^2=(2t+19)^2+(3t-14)^2+(t-20)^2=14t^2-48t+957$

$$=14\left(t-\frac{12}{7}\right)^2+\frac{6411}{7}\ge\frac{6411}{7}$$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow t=\frac{12}{7}$. Vậy $M\left(\frac{31}{7};\frac{29}{7};-\frac{5}{7}\right)$ là điểm cần tìm.

c. Gọi $E(x;y;z)$ là điểm thỏa mãn: $\overrightarrow{EA}-4\overrightarrow{EB}+2\overrightarrow{EC}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{EA}=2\overrightarrow{AC}-4\overrightarrow{AB}$

Ta tìm được $E(10;-2;16)$.

Khi đó $F=-EM^2+EA^2-4EB^2+2EC^2$

Vì $EA^2-4EB^2+2EC^2$ không đổi nên F lớn nhất, nhỏ nhất khi và chỉ khi EM nhỏ nhất, lớn nhất.

Mặt cầu (S) có tâm $I(2;2;8)$, $\overrightarrow{IE}=(8;-4;8)\Rightarrow IE:\begin{cases}x=2+8t\\y=2-4t\\z=8+8t\end{cases}$

Tọa độ các giao điểm của IE với mặt cầu (S) là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x=2+8t\\y=2-4t\\z=8+8t\\(x-2)^2+(y-2)^2+(z-8)^2=36\end{cases}\Rightarrow 8^2t^2+4^2t^2+8^2t^2=36\Leftrightarrow t=\pm\frac{1}{2}.$$

- $t=\frac{1}{2}\Rightarrow M(6;0;12)\Rightarrow\overrightarrow{IM}=(2;-2;4)\Rightarrow MI=2\sqrt{6}$
- $t=-\frac{1}{2}\Rightarrow N(-2;4;4)\Rightarrow\overrightarrow{IN}=(-4;2;4)\Rightarrow NI=6$

Do $NI>MI$ nên ta có được:

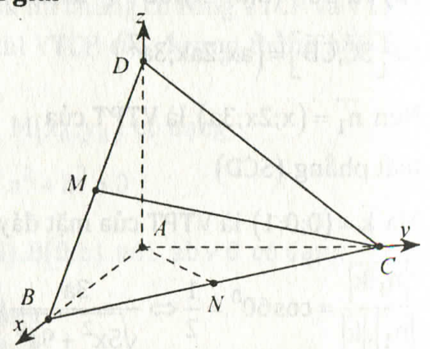
- F lớn nhất khi và chỉ khi $E\equiv M\Rightarrow E(6;0;12)$
- F nhỏ nhất khi và chỉ khi $E\equiv N\Rightarrow E(-2;4;4)$.

9. Cho hình tứ diện $ABCD$ có cạnh AD vuông góc với mặt phẳng (ABC); $AC=AD=4cm$; $AB=3cm$ và $BC=5cm$.

a. Tính khoảng cách từ điểm A đến mặt phẳng (BCD).

b. Gọi M,N lần lượt là trung điểm các cạnh BD,BC. Tính góc và khoảng cách giữa hai đường thẳng CM và AN.

Hướng dẫn giải



a. Ta có: $AB^2+AC^2=BC^2=25$ nên ΔABC vuông tại A.

Chọn hệ trục toạ độ Đê-cac vuông góc Oxyz như sau hình vẽ

Suy ra $O\equiv A(0;0;0)$, $B(3;0;0)$, $C(0;4;0)$, $D(0;0;4)$.

Phương trình tổng quát của mặt phẳng (BCD)

$\frac{x}{3}+\frac{y}{4}+\frac{z}{4}=1\Leftrightarrow 4x+3y+3z-12=0$

Do đó: $d(A,(BCD))=\frac{|-12|}{\sqrt{16+9+9}}=\frac{12}{\sqrt{34}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}$

b. Ta có $M(0;2;2),N\left(\frac{3}{2};2;0\right)$. Suy ra $\overrightarrow{AN}=\left(\frac{3}{2};2;0\right),\overrightarrow{CM}=(0;-2;2),\overrightarrow{AC}(0;4;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]=(4;-3;-3),\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}=-12$.

Suy ra khoảng cách giữa hai đường thẳng AN,CM là:

$$d(AN,CM)=\frac{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right].\overrightarrow{AC}\right|}{\left|\left[\overrightarrow{AN},\overrightarrow{CM}\right]\right|}=\frac{12}{\sqrt{4^2+3^2+3^2}}=\frac{6\sqrt{34}}{17}.$$

Góc giữa hai đường thẳng AN,CM là:

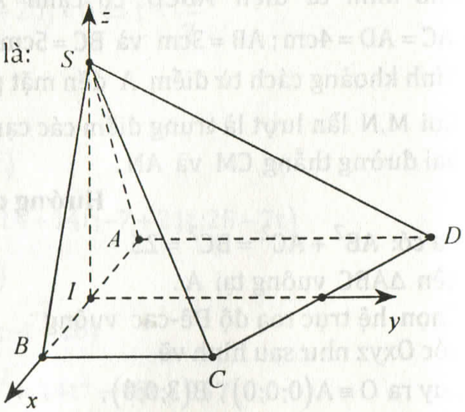
$$\cos(AN,CM)=\frac{\left|\overrightarrow{AN}.\overrightarrow{CM}\right|}{AN.CM}=\frac{4}{\sqrt{\frac{9}{4}+4}.\sqrt{2^2+2^2}}=\frac{2\sqrt{2}}{5}\Rightarrow(AN,CM)\approx 56^0.$$

10. Cho hình chóp S.ABCD có đáy ABCD là hình thang vuông tại A và B; $AB=AD=2a$; $CB=a$; góc giữa hai mặt phẳng (SBC) và (ABCD) bằng 60^0. Gọi I là trung điểm của cạnh AB. Biết hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với mặt phẳng (ABCD), tính thể tích khối chóp S.ABCD theo a.

Hướng dẫn giải

Vì hai mặt phẳng (SDI) và (SCI) cùng vuông góc với đáy nên $SI\perp(ABCD)$.

Chọn hệ trục tọa độ như hình vẽ.



Đặt $SI=x,x>0$. Ta có tọa độ các điểm là:

$I(0;0;0),A(-a;0;0),B(a;0;0),C(a;a;0),$
$D(-a;2a;0),S(0;0;x)$.

Suy ra $\overrightarrow{SC}=(a;a;-x),\overrightarrow{CD}=(-2a;a;0)$

$\Rightarrow\left[\overrightarrow{SC},\overrightarrow{CD}\right]=\left(ax;2ax;3a^2\right)$

Nên $\overrightarrow{n_1}=(x;2x;3a)$ là VTPT của mặt phẳng (SCD).

Mà $\vec{k}=(0;0;1)$ là VTPT của mặt đáy nên theo giả thiết đề bài ta có:

$$\frac{\left|\overrightarrow{n_1}.\vec{k}\right|}{\left|\overrightarrow{n_1}\right|.\left|\vec{k}\right|}=\cos 60^0=\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{3a}{\sqrt{5x^2+9a^2}}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\frac{3a\sqrt{15}}{5}$$

Mặt khác: $S_{ABCD}=\frac{AB(BC+AD)}{2}=3a^2$ nên thể tích khối chóp là

$$V_{S.ABCD}=\frac{1}{3}SI.S_{ABCD}=\frac{1}{3}.\frac{3a\sqrt{15}}{5}.3a^2=\frac{3a^3\sqrt{15}}{5}.$$

Chuyên đề VII

HÌNH HỌC GIẢI TÍCH TỌA ĐỘ OXY

Dạng 1. Đường thẳng

✍ **Viết phương trình của đường thẳng.**

- Để viết phương trình tổng quát của đường thẳng Δ ta cần xác định
  - Điểm $A(x_0;y_0)\in\Delta$
  - Một vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ của Δ.

  Khi đó phương trình tổng quát của Δ là $a(x-x_0)+b(y-y_0)=0$
- Để viết phương trình tham số của đường thẳng Δ ta cần xác định
  - Điểm $A(x_0;y_0)\in\Delta$
  - Một vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b)$ của Δ

  Khi đó phương trình tham số của Δ là $\begin{cases}x=x_0+at\\y=y_0+bt\end{cases}$, $t\in\mathbb{R}$.
- Để viết phương trình chính tắc của đường thẳng Δ ta cần xác định:
  - Điểm $A(x_0;y_0)\in\Delta$
  - Một vectơ chỉ phương $\vec{u}(a;b),ab\neq 0$ của Δ

  Phương trình chính tắc của đường thẳng Δ là $\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}$

Chú ý:

- ○ Nếu hai đường thẳng song song với nhau thì chúng có cùng VTCP và VTPT.
- ○ Hai đường thẳng vuông góc với nhau thì VTCP của đường thẳng này là VTPT của đường thẳng kia và ngược lại
- ○ Phương trình đường thẳng Δ qua điểm $M(x_0;y_0)$ có dạng

  $$\Delta: a(x-x_0)+b(y-y_0)=0 \text{ với } a^2+b^2>0$$
- ○ Phương trình đường thẳng đi qua $A(a;0),B(0;b)$ với $ab\neq 0$ có dạng $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$

✍ **Xét vị trí tương đối của hai đường thẳng.**

Để xét vị trí tương đối của hai đường thẳng

$$d_1: a_1x+b_1y+c_1=0;\ d_2: a_2x+b_2y+c_2=0.$$

Ta xét hệ $\begin{cases}a_1x+b_1y+c_1=0\\a_2x+b_2y+c_2=0\end{cases}$ (I)

+ Hệ (I) vô nghiệm suy ra $d_1\parallel d_2$.

+ Hệ (I) vô số nghiệm suy ra $d_1 \equiv d_2$

+ Hệ (I) có nghiệm duy nhất suy ra d_1 và d_2 cắt nhau và nghiệm của hệ là tọa độ giao điểm.

Chú ý: Với trường hợp $a_2.b_2.c_2 \neq 0$ khi đó:

+ Nếu $\frac{a_1}{b_1} \neq \frac{a_2}{b_2}$ thì hai đường thẳng cắt nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng song song nhau.

+ Nếu $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ thì hai đường thẳng trùng nhau.

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho ΔABC, biết:

1. $A(-2;1)$, $B(2;3)$, $C(1;-5)$. Lập phương trình đường thẳng đi qua hai điểm D,G với D là chân đường phân giác trong góc A và G là trọng tâm của ΔABC
2. $A(4;-1)$, đường cao kẻ từ B có phương trình $\Delta: 2x-3y=0$, trung tuyến đi qua đỉnh C có phương trình $\Delta': 2x+3y=0$. Lập phương trình các cạnh của ΔABC

Lời giải

1. Gọi $D(x_D;y_D)$ là chân đường phân giác hạ từ A của ΔABC

Ta có $AB=\sqrt{(-2-2)^2+(3-1)^2}=2\sqrt{5}$, $AC=\sqrt{(1+2)^2+(-5-1)^2}=3\sqrt{5}$

Do đó $\overrightarrow{BD}=\frac{AB}{AC}\overrightarrow{DC}=\frac{2}{3}\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D-2=\frac{2}{3}(1-x_D) \\ y_D-3=\frac{2}{3}(-5-y_D) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{8}{5} \\ y=\frac{-1}{5} \end{cases} \Rightarrow D\left(\frac{8}{5};-\frac{1}{5}\right)$

$G\left(\frac{1}{3};-\frac{1}{3}\right)$ là trọng tâm của ΔABC

Ta có $\overrightarrow{DG}\left(-\frac{19}{15};-\frac{2}{15}\right)$ suy ra đường thẳng DG nhận $\vec{u}(19;2)$ làm VTCP nên có phương trình là $\begin{cases} x=\frac{1}{3}+19t \\ y=-\frac{1}{3}+2t \end{cases}$.

2. Ta có AC đi qua $A(4;-1)$ và vuông góc với Δ nên nhận $\vec{u}(3;2)$ làm VTPT nên có phương trình là $3(x-4)+2(y+1)=0$ hay $3x+2y-10=0$

Suy ra toạ độ C là nghiệm của hệ : $\begin{cases} 3x+2y-10=0 \\ 2x+3y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=6 \\ y=-4 \end{cases} \Rightarrow C(6;-4)$

Giả sử $B(x_B;y_B)$ suy ra trung điểm $I\left(\frac{x_B+4}{2};\frac{y_B-1}{2}\right)$ của AB thuộc đường thẳng Δ' do đó : $2.\frac{x_B+4}{2}+3.\frac{y_B-1}{2}=0$ hay $2x_B+3y_B+5=0$ (1)

Mặt khác $B\in\Delta$ suy ra $2x_B-3y_B=0$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $B\left(-\frac{5}{4};-\frac{5}{6}\right)$

Ta có $\overrightarrow{AB}\left(-\frac{21}{4};\frac{1}{6}\right)$, $\overrightarrow{BC}\left(-\frac{31}{4};\frac{19}{6}\right)$. Suy ra phương trình đường thẳng AB :

$\begin{cases} x=4-\frac{21}{4}t \\ y=-1+\frac{1}{6}t \end{cases}$, BC : $\begin{cases} x=6-\frac{31}{4}t' \\ y=-4+\frac{19}{6}t' \end{cases}$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy,

1. Cho ΔABC với $AB=\sqrt{5}$, đỉnh $C(-1;-1)$, đường thẳng (AB): $x+2y-3=0$ và trọng tâm G của ΔABC thuộc đường thẳng $x+y-2=0$. Xác định tọa độ A,B của tam giác.
2. Cho hình chữ nhật ABCD có phương trình cạnh AB: $x-2y-1=0$, đường chéo BD: $x-7y+14=0$ và đường chéo AC đi qua điểm $E(2;1)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật.

Lời giải

1. Gọi I là trung điểm AB, $G(x_G;y_G)$ là tọa độ trọng tâm ΔABC

$\Rightarrow \overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CI} \Leftrightarrow \begin{cases} x_G=\frac{2x-1}{3} \\ y_G=\frac{2y-1}{3} \end{cases}$

$G\in x+y-2=0$ nên có: $\frac{2x-1}{3}+\frac{2y-1}{3}-2=0$

Tọa độ điểm I thỏa mãn hệ: $\begin{cases} x+2y-3=0 \\ \frac{2x-1}{3}+\frac{2y-1}{3}-2=0 \end{cases} \Rightarrow I(5;-1)$

Gọi $A(x_A;y_A) \Rightarrow IA^2=(x_A-5)^2+(y_A+1)^2=\left(\frac{AB}{2}\right)^2=\frac{5}{4}$

Hơn nữa $A\in x+2y-3=0$ suy ra tọa độ điểm A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x_A+2y_A-3=0 \\ (x_A-5)^2+(y_A+1)^2=\dfrac{5}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x_A=4 \\ y_A=-\dfrac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x_A=6 \\ y_A=-\dfrac{3}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy, $A\left(4,-\frac{1}{2}\right), B\left(6;-\frac{3}{2}\right)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

2. $B=AB\cap BD\Rightarrow$ toạ độ điểm B là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-2y-1=0 \\ x-7y+14=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases} \Rightarrow B=(7;\,3)$$

Giả sử: $A=(2a+1;\,a)\in AB:2-2y-1=0;\ D=(7d-14;\,d)\in BD:x-7y+14=0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}=(6-2a;\,3-a),\ \overrightarrow{BD}=(7d-21;\,d-3);\ \overrightarrow{AD}=(7d-2a-15;\,d-a)$.

Vì $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}\Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD}=0\Leftrightarrow(3-a)(15d-5a-30)=0\Leftrightarrow a=3$ (không thỏa) hoặc $3d-a-6=0$

$\Rightarrow a=3d-6\Rightarrow \overrightarrow{AD}=(d-3;6-2d)$. Hơn nữa: $\overrightarrow{BC}=(x_C-7;\,y_C-3)$

ABCD là hình chữ nhật nên

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}\begin{cases} d-3=x_C-7 \\ 6-2d=y_C-3 \end{cases}\Rightarrow\begin{cases} x_C=d+4 \\ y_C=9-2d \end{cases}\Rightarrow C=(d+4;\,9-2d)$$

$\Rightarrow \overrightarrow{EA}=(6d-13;\,3d-7),\ \overrightarrow{EC}=(d+2;\,8-2d)$ và $d\neq3$

Lại có: $E(2;1)\in AC\Rightarrow \overrightarrow{EA},\ \overrightarrow{EC}$ cùng phương

$\Leftrightarrow(6d-13)(8-2d)=(d+2)(3d-7)\Leftrightarrow d^2-5d+6=0$

$\Leftrightarrow d=2\Rightarrow a=0\Rightarrow A=(1;\,0),\ B=(7;\,3),\ C=(6;\,5),\ D=(0;\,0)$

Vậy, $A=(1;\,0),\ B=(7;\,3),\ C=(6;\,5),\ D=(0;\,0)$ là các đỉnh của hình chữ nhật cần tìm.

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy,

1. Cho hình chữ nhật ABCD có cạnh AB: $x-3y+5=0$, đường chéo BD: $x-y-1=0$ và đường chéo AC đi qua điểm $M(-9;2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình chữ nhật ABCD.

2. Cho 3 đường thẳng $d_1:x-3y=0, d_2:2x+y-5=0,\ d_3:x-y=0$. Tìm tọa độ các điểm $A\in d_1, B\in d_2, C, D\in d_3$ để tứ giác ABCD là một hình vuông.

Lời giải

1. Tọa độ điểm B là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} x-3y+5=0 \\ x-y-1=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=4 \\ y=3 \end{cases}\Rightarrow B(4;3)$.

Gọi $A(-5+3a;a)\in AB\Rightarrow\overrightarrow{MA}=(4+3a;-2+a)\Rightarrow\overrightarrow{n_{AC}}=(2-a;4+3a)$

Ta có: $\overrightarrow{n_{AB}}=(1;-3),\ \overrightarrow{n_{BD}}=(1;-1),\overrightarrow{n_{AC}}=(2-a;4+3a)$ lần lượt là vectơ pháp tuyến của AB, BD, AC. Hơn nữa $\widehat{ABD}=\widehat{BAC}\Rightarrow\cos\widehat{ABD}=\cos\widehat{BAC}$

Mà $\cos\widehat{ABD}=\dfrac{2}{\sqrt5},\ \cos\widehat{BAC}=\dfrac{10|a+1|}{\sqrt{10}\sqrt{(2-a)^2+(4+3a)^2}}$

Nên có : $\dfrac{10|a+1|}{\sqrt{10}\sqrt{(2-a)^2+(4+3a)^2}}=\dfrac{2}{\sqrt5}$, bình phương 2 vế, rút gọn ta được phương trình : $a^2+2a-3=0\Leftrightarrow a=-3$ hoặc $a=1$

- * Với $a=-3$ không thỏa vì AC // BD
- * Với $a=1\Rightarrow A(-2;1)$. Đường thẳng AD đi qua A và vuông góc với AB nên có phương trình : $3x+y+5=0$

Tọa độ điểm D là nghiệm của hệ : $\begin{cases} x-y-1=0 \\ 3x+y+5=0 \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=-1 \\ y=-2 \end{cases}\Rightarrow D(-1;-2)$

Gọi $I\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm BD do đó I cũng là trung điểm $AC\Rightarrow C(5;0)$

Vậy, $A(-2;1),\ B(4;3),\ C(5;0),\ D(-1;-2)$ là tọa độ cần tìm.

2. Gọi $B(b;5-2b)\in d_2$. Đường thẳng Δ_1 qua B và vuông góc d_3 cắt d_3 tại C.

Phương trình $\Delta_1:x+y+b-5=0$

Tọa độ của C là nghiệm hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y+b-5=0 \end{cases}\Rightarrow C\left(\frac{5-b}{2};\frac{5-b}{2}\right)$

Đường thẳng AB // d_3 nên có phương trình $x-y+5-3b=0$.

Tọa độ A là nghiệm hệ $\begin{cases} x-y+5-3b=0 \\ x-3y=0 \end{cases}\Rightarrow A\left(\frac{9b-15}{2};\frac{3b-5}{2}\right)$

Đường thẳng Δ_2 qua A và vuông góc d_3 cắt d_3 tại D.

Phương trình $\Delta_1:x+y-6b+10=0$

Tọa độ của D là nghiệm của hệ $\begin{cases} x-y=0 \\ x+y-6b+10=0 \end{cases}\Rightarrow D(3b-5;3b-5)$

ABCD là hình vuông $\Leftrightarrow AD=CD\Leftrightarrow 2b^2-9b+10=0\Leftrightarrow b=2$ hoặc $b=\frac{5}{2}$

$b=2\Rightarrow A\left(\frac{3}{2};\frac{1}{2}\right), B(2;1), C\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right), D(1;1)$ hoặc

$b=\frac{5}{2}\Rightarrow A\left(\frac{15}{4};\frac{5}{4}\right), B\left(\frac{5}{2};0\right), C\left(\frac{5}{4};\frac{5}{4}\right), D\left(\frac{5}{2};\frac{5}{2}\right)$

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy,

1. Cho đường thẳng (d): $x+2y-1=0$, (d'): $3x+y-7=0$ cắt nhau tại I. Viết phương trình đường thẳng đi qua $M(1;2)$, đồng thời cắt 2 đường thẳng (d) và (d') lần lượt tại A và B sao cho $AI=\sqrt{2}AB$.
2. Cho các điểm $A(1; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(-1, 4)$, $D(3; 5)$ và đường thẳng d: $3x - y - 5 = 0$. Tìm điểm M trên (d) sao cho hai tam giác MAB, MCD có diện tích bằng nhau.

Lời giải

1. Tọa độ điểm I là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}x+2y-1=0\\3x+y-7=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-3\\y=2\end{cases}\Rightarrow I(-3;2).$$

Lấy $H(1;0)\in(d)$ và $K\in(d')\Rightarrow K(a;-7-3a)$ sao cho $IH=\sqrt{2}KH$.

Ta có, $\overrightarrow{HI}=(-4;2)$ và $\overrightarrow{HK}=(-1+a;-7-3a)$

Mà $IH=\sqrt{2}KH\Leftrightarrow IH^2=KH^2\Leftrightarrow 20=2\left[(a-1)^2+(7+3a)^2\right]\Rightarrow a=-2$

Ta có: $\begin{cases}AI=\sqrt{2}AB\\IH=\sqrt{2}KH\end{cases}\Rightarrow\dfrac{IH}{AI}=\dfrac{HK}{AB}\Rightarrow HK\parallel AB$

Vậy, đường thẳng cần tìm là đường thẳng đi qua M và có vectơ chỉ phương là $\overrightarrow{KH}=(3;1)$ có phương trình: $\dfrac{x-1}{3}=\dfrac{y-2}{1}$.

2. $M(x;y)\in d\Leftrightarrow 3x-y-5=0$. $AB=5, CD=\sqrt{17}$

Ta có: $\overrightarrow{AB}(-3;4)\Rightarrow\overrightarrow{n_{AB}}(4;3)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $AB: 4x+3y-4=0$.

$\overrightarrow{CD}(4;1)\Rightarrow\overrightarrow{n_{CD}}(1;-4)\Rightarrow$ phương trình đường thẳng $CD: x-4y+17=0$.

$$S_{MAB}=S_{MCD}\Leftrightarrow AB.d(M,AB)=CD.d(M,CD)\Leftrightarrow 5\cdot\frac{|4x+3y-4|}{5}=\sqrt{17}\cdot\frac{|x-4y+17|}{\sqrt{17}}$$

$$\Leftrightarrow|4x+3y-4|=|x-4y+17|$$

Tọa độ M cần tìm là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases}3x-y-5=0\\|4x+3y-4|=|x-4y+17|\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}3x-y-5=0\\3x+7y-21=0\end{cases}\\\begin{cases}3x-y-5=0\\5x-y+13=0\end{cases}\end{array}\right.\Rightarrow M_1\left(\frac{7}{3};2\right),M_2(-9;-32)$$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy,

1. Cho tam giác ABC có diện tích bằng 96. Gọi $M(2;0)$ là trung điểm của AB, phân giác trong của góc A có phương trình: $(d): x-y-10=0$. Đường thẳng AB tạo với (d) một góc φ thỏa mãn $\cos\varphi=\dfrac{3}{5}$. Xác định tọa độ các đỉnh của tam giác ABC.
2. Cho 3 điểm $A(1;1)$, $B(3;2)$, $C(7;10)$. Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua A sao cho tổng các khoảng cách từ B và C tới đường thẳng Δ lớn nhất.

Lời giải

1. M' đối xứng với $M(2;0)$ qua $(d): x-y-10=0\Rightarrow M'(10;-8)$.

Đường thẳng qua $M(2;0)$ với vectơ pháp tuyến $\vec{n}(a;b)$ có phương trình:

$a(x-2)+by=0$ tạo với $(d): x-y-10=0$ một góc

$$\varphi\Rightarrow\frac{|a-b|}{\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{2}}=\cos\varphi=\frac{3}{5}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a=7b\\b=7a\end{array}\right.$$

* Với $a=7b\Rightarrow(AB)$: $7x+y-14=0$

AB cắt d tại $A\Rightarrow A(3;-7)$ và B đối xứng A qua $M\Rightarrow B(1;7)$

$$\Rightarrow AB=10\sqrt{2}\Rightarrow S_{\Delta AM'B}=\frac{1}{2}AB.d[M',AB]=48=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM'}\Rightarrow C(17;-9)$$

* Với $b=7a\Rightarrow(AB)$: $x+7y-2=0$

AB cắt d tại $A\Rightarrow A(9;-1)$ và B đối xứng A qua $M\Rightarrow B(-5;1)$

$$\Rightarrow AB=10\sqrt{2}\Rightarrow S_{\Delta AM'B}=\frac{1}{2}AB.d[M',AB]=48=\frac{1}{2}S_{\Delta ABC}\Rightarrow\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AM'}\Rightarrow C(11;-15)$$

Vậy, $A(3;-7), B(1;7), C(17;-9)$ hoặc $A(9;-1), B(-5;1), C(11;-15)$ là tọa độ cần tìm.

2. * Nếu đường thẳng Δ cắt đoạn BC tại 1 điểm M. Khi đó: $d[B,\Delta]+d[C,\Delta]\le BM+CM=BC$. Đẳng thức xảy ra khi đường thẳng Δ vuông góc với BC.

* Nếu đường thẳng Δ không cắt đoạn BC. Gọi $I(5;6)$ là trung điểm BC.

Ta có: $d[B,\Delta]+d[C,\Delta]\le 2d[I,\Delta]\le 2AI$. Đẳng thức xảy ra khi đường thẳng Δ vuông góc với AI

Vì ΔABC nhọn nên $2AI>BC$, do đó $d[B,\Delta]+d[C,\Delta]$ lớn nhất khi và chỉ khi đường thẳng Δ đi qua A và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{AI}=(4;5)$

Đường thẳng cần tìm: $4(x-1)+5(y-1)=0$ hay $4x+5y-9=0$

Bài tập tự luyện

1. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho tam giác MNP có $N(2;-1)$, đường cao hạ từ M xuống NP có phương trình: $3x-4y+27=0$ và đường phân giác trong đỉnh P có phương trình: $x+2y-5=0$. Viết phương trình các cạnh chứa các cạnh tam giác.

Hướng dẫn giải

NP đi qua N và vuông góc với đường cao hạ từ M, nên có phương trình: $4x+3y-5=0$. $P(-1;3)$ là tọa độ giao điểm của NP và phân giác trong góc P.

Giả sử PI là phân giác trong P thì $\widehat{MPI}=\widehat{IPN}$.

$PM: y-3=0$, $MN: 4x+7y-1=0$

2. Trong mặt phẳng toạ độ đề các vuông góc Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A có trọng tâm $G\left(0;\frac{2}{3}\right)$. Viết phương trình chứa các cạnh tam giác để $I\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$ là trung điểm cạnh BC.

Hướng dẫn giải

Gọi $B(x_B;y_B)$, $C(x_C;y_C)$ là tọa độ cần tìm.

G là trọng tâm tam giác nên có: $\overrightarrow{GI}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AI}\Rightarrow I(-1;3)$

I là trung điểm BC và tam giác ABC vuông cân tại A nên có:

$$\begin{cases} x_B+x_C=2x_I=1 \\ y_B+y_C=2y_I=-1 \\ AB=AC \\ \overrightarrow{AB}\overrightarrow{AC}=0 \end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} B(4;1),C(-3;2) \\ B(-3;2),C(4;1) \end{array}\right.$$

3. Viết phương trình các cạnh hình vuông $ABCD$, biết rằng $M(0;2)\in AB$, $N(5;-3)\in BC$, $P(-2;-2)\in CD$, $Q(2;-4)\in DA$.

Hướng dẫn giải

$(AB): ax+b(y-2)=0$, $(AD): b(x-2)-a(y-4)=0$

$d[P,AB]=d[N,AD]\Rightarrow 3a+b=0$ hoặc $a+7b=0$

4. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho tam giác ABC vuông cân tại A, các đỉnh A,B,C lần lượt nằm trên các đường thẳng $d: x+y-5=0$, $d_1: x+1=0$, $d_2: y+2=0$ và $BC=5\sqrt{2}$. Tìm tọa độ đỉnh A,B,C của tam giác.

Hướng dẫn giải

Vì $d_1\perp d_2$ và ΔABC vuông cân tại A nên A cách đều d_1,d_2, do đó A là giao điểm của d và phân giác hợp bởi d_1,d_2.

Phương trình phân giác hợp bởi d_1,d_2 là $x-1=\pm(y-2)$ $\Rightarrow(t_1): x-y-1=0$ hoặc $(t_2): x+y+3=0$ không thỏa vì $(t_2)\|(d)$.

Tọa độ điểm A là nghiệm hệ: $\begin{cases} x-y-1=0 \\ x+y-5=0 \end{cases}\Rightarrow A(3;2)$

Gọi $B(-1;b)\in d_1$, $C(c;-2)\in d_2$

Theo bài toán ta có: $\begin{cases} \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0 \\ BC^2=50 \end{cases}\Rightarrow\left[\begin{array}{l} B(-1;5),C(0;-2) \\ B(-1;-1),C(6;-2) \end{array}\right.$

5. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho ΔABC có $C(1;1)$ và $AB=\sqrt{5}$ và $AB: x+2y-3=0$, trọng tâm ΔABC thuộc đường thẳng $x+y-2=0$. Tìm tọa độ điểm A,B.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(3-2a;a)$, $B(3-2b;b)$ là tọa độ cần tìm. G là trọng tâm ΔABC và thuộc đường thẳng $x+y-2=0$ nên suy ra $a+b-2=0$. Hơn nữa $AB=\sqrt{5}$ suy ra $(a-b)^2=1$. Từ đây, tìm được $a=\frac{3}{2}$, $b=\frac{1}{2}$.

6. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho hình vuông $ABCD$ có $A(-2;6)$, đỉnh B thuộc đường thẳng $d: x-2y+6=0$. Gọi M,N lần lượt là hai điểm trên 2 cạnh BC, CD sao cho $BM=CN$. Xác định tọa độ đỉnh C, biết rằng AM cắt BN tại $I\left(\frac{2}{5};\frac{14}{5}\right)$.

Hướng dẫn giải

$B\in d: x-2y+6=0\Rightarrow B(2y-6;y)$

Ta thấy: ΔAMB và ΔBNC bằng nhau $\Rightarrow AI\perp BI\Rightarrow\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$ $\Rightarrow y=4$

$\Rightarrow B(2;4)$. $BC: 2x-y=0\Rightarrow C(c;2c)$, $AB=2\sqrt{5}$, $BC=\sqrt{(c-2)^2+(2c-4)^2}$

Theo bài toán, $AB=BC\Rightarrow|c-2|=2\Rightarrow C(0;0),C(4;8)$

Vì I nằm trong hình vuông nên I,C cùng phía với đường thẳng $AB\Rightarrow C(0;0)$.

7. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho ΔABC có $A(2;7)$, đường thẳng AB cắt trục Oy tại E sao cho $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}$, đồng thời ΔAEC cân tại A và có trọng tâm $G\left(2;\frac{13}{3}\right)$. Viết phương trình chứa cạnh BC.

Hướng dẫn giải

Gọi I là trung điểm của EC. Vì G là trọng tâm ΔAEC nên

$\overrightarrow{AG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI} \Rightarrow I(2;3)$. Hơn nữa $E\in Oy$ nên $E(0;e)$

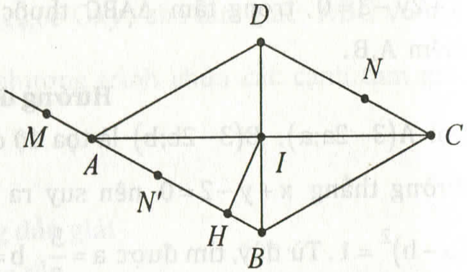
Vì ΔAEC cân tại A nên $AI\perp EC\Rightarrow \overrightarrow{AI}.\overrightarrow{EC}=0\Rightarrow e=3 \Rightarrow E(0;3),\ C(4;3)$.

Mặt khác, $\overrightarrow{AE}=2\overrightarrow{EB}\Rightarrow B(-1;1)$

Vậy, phương trình chứa cạnh BC: $2x - 5y + 7 = 0$

8. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho hình thoi ABCD có tâm I(2; 1) và AC = 2BD. Điểm $M\left(0;\frac{1}{3}\right)$ thuộc đường thẳng AB; điểm N(0; 7) thuộc đường thẳng CD. Tìm tọa độ đỉnh B biết B có hoành độ dương.

Hướng dẫn giải



Gọi N′ là điểm đối xứng của N qua tâm I thì ta có N′(4; –5) và N′ thuộc cạnh AB

Suy ra $\overrightarrow{MN'}=\left(4;-\frac{16}{3}\right)$ nên phương trình AB: $4x + 3y - 1 = 0$

Vì AC = 2BD nên AI = 2BI. Gọi H là hình chiếu của I lên AB, ta có:

$$IH=d(I,AB)=\frac{|8+3-1|}{5}=2 \text{ và } \frac{1}{IH^2}=\frac{1}{IA^2}+\frac{1}{IB^2}=\frac{5}{4IB^2}\Rightarrow IB=\frac{IH\sqrt{5}}{2}=\sqrt{5}$$

Mặt khác $B\in AB\Rightarrow B\left(b;\frac{1-4b}{3}\right), b>0\Rightarrow IB^2=(b-2)^2+\left(\frac{4b+2}{3}\right)^2=5$

$\Leftrightarrow b=1$. Vậy $B(1;-1)$

9. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho điểm A(2; 0) và 2 đường thẳng $d_1: x-y=0,\ d_2: x+2y+1=0$. Tìm các điểm $B\in d_1,\ C\in d_2$ để tam giác ABC vuông cân tại A.

Hướng dẫn giải

$B\in d_1, C\in d_2\Rightarrow B(b;b), C(-1-2c;c)$

$$AB\perp AC\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0\Leftrightarrow -bc-3b+4c+6=0\Leftrightarrow b=\frac{4c+6}{c+3} \quad (1)$$

$$AB=AC\Leftrightarrow 2(b-1)^2=5c^2+12c+7 \quad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $2\left(\frac{4c+6}{3+c}-1\right)^2=5c^2+12c+7$

$\Leftrightarrow 5c^4+42c^3+106c^2+114c+45=0\Leftrightarrow (c+1)(c+5)\left(5c^2+12c+9\right)=0$

$c=-1\Rightarrow B(1;1), C(1;-1)$ hoặc $c=-5\Rightarrow B(7;7), C(9;-5)$.

10. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy cho hai đường thẳng $d_1: x - 2y + 1 = 0$, $d_2: 2x+3y=0$. Xác định tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD, biết A thuộc đường thẳng d_1, C thuộc đường thẳng d_2 và hai điểm B,D thuộc trục Ox.

Hướng dẫn giải

Vì $A\in d_1, C\in d_2$ nên $A(2a-1;a), C(3c;-2c)$, suy ra $I\left(\frac{2a+3c-1}{2};\frac{a-2c}{2}\right)$ là trung điểm AC.

Do ABCD là hình vuông nên I là trung điểm của BD, hay $I \in Ox$. Do đó $a = 2c$.

Mặt khác $AC\perp BD\equiv Ox$ nên suy ra $2a-1=3c\Leftrightarrow c=1$.

Từ đó, ta tìm được $A(3;2), C(3;-2), I(3;0)$.

Vì $B\in Ox\Rightarrow B(b;0)$, mà $IB=IA=2\Rightarrow |b-3|=2\Leftrightarrow b=5, b=1$.

Vậy tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD là:

$A(3;2), B(1;0), C(3;-2), D(5;0)$ hoặc $A(3;2), B(5;0), C(3;-2), D(1;0)$.

11. Cho hình bình hành ABCD. Biết $I\left(\frac{7}{2};\frac{5}{2}\right)$ là trung điểm của cạnh CD, $D\left(3;\frac{3}{2}\right)$ và đường phân giác góc $\widehat{BAC}$ có phương trình là $\Delta: x-y+1=0$. Xác định tọa độ đỉnh B.

Hướng dẫn giải

Cách 1: Điểm I là trung điểm của CD nên $\begin{cases} x_C=2x_I-x_D=4 \\ y_C=2x_I-y_D=\frac{7}{2} \end{cases}\Rightarrow C\left(4;\frac{7}{2}\right)$

Vì $A\in\Delta$ nên tọa độ điểm A có dạng $A(a;a+1)$

Mặt khác ABCD là hình bình hành tương đương với $\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}$ không cùng phương

và $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}\Leftrightarrow \begin{cases} x_B-a=4-3 \\ y_B-a-1=\frac{7}{2}-\frac{3}{2} \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x_B=a+1 \\ y_B=a+3 \end{cases}\Rightarrow B(a+1;a+3)$

$\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}$ không cùng phương khi và chỉ khi $\frac{a-3}{1}\neq\frac{a+1-\frac{3}{2}}{2}\Leftrightarrow a\neq\frac{11}{2}$

Đường thẳng Δ là phân giác góc $\widehat{BAC}$ nhận vectơ $\vec{u}=(1;1)$ làm vec tơ chỉ phương

nên $\cos\left(\overrightarrow{AB};\vec{u}\right)=\cos\left(\overrightarrow{AC};\vec{u}\right)\Leftrightarrow \frac{\overrightarrow{AB}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\left|\vec{u}\right|}=\frac{\overrightarrow{AC}.\vec{u}}{\left|\overrightarrow{AC}\right|\left|\vec{u}\right|}$ (*)

Có $\overrightarrow{AB}(1;2), \overrightarrow{AC}\left(4-a;\frac{5}{2}-a\right)$ nên (*) $\Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{5}}=\frac{\frac{13}{2}-2a}{\sqrt{(4-a)^2+\left(\frac{5}{2}-a\right)^2}}$

$\Leftrightarrow 2a^2-13a+11=0 \Leftrightarrow a=1$ hoặc $a=\frac{11}{2}$ (loại)

Vậy, tọa độ điểm $B(2;4)$

Cách 2: Ta có $C\left(4;\frac{7}{2}\right)$.

Đường thẳng d đi qua C vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(1;1)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $1.(x-4)+1.\left(y-\frac{7}{2}\right)=0$ hay $2x+2y-15=0$

Tọa độ giao điểm H của Δ và d là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ 2x+2y-15=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{13}{4} \\ y=\frac{17}{4} \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{13}{4};\frac{17}{4}\right)$$

Gọi C' là điểm đối xứng với C qua Δ thì khi đó C' thuộc đường thẳng chứa cạnh AB và H là trung điểm của CC' do đó $\begin{cases} x_{C'}=2x_H-x_C \\ y_{C'}=2y_H-y_C \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{C'}=\frac{5}{2} \\ y_{C'}=5 \end{cases} \Rightarrow C'\left(\frac{5}{2};5\right)$

Suy ra đường thẳng chứa cạnh AB đi qua C' và nhận $\overrightarrow{DC}(1;2)$ làm vectơ chỉ phương nên có phương trình là $\begin{cases} x=\frac{5}{2}+t \\ y=5+2t \end{cases}$

Thay x, y từ phương trình đường thẳng chứa cạnh AB vào phương trình đường thẳng Δ, ta được $\frac{5}{2}+t-5-2t+1=0 \Leftrightarrow t=-\frac{3}{2}$ suy ra $A(1;2)$.

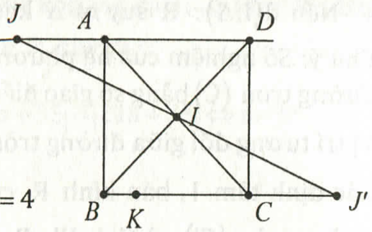
$ABCD$ là hình bình hành nên $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B-1=1 \\ y_B-2=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_B=2 \\ y_B=4 \end{cases}$

Vậy, tọa độ điểm $B(2;4)$.

12. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy cho ba điểm $I(1; 1)$ $J(-2; 2)$, $K(2; -2)$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông ABCD sao cho I là tâm hình vuông, J thuộc cạnh AB và K thuộc cạnh CD

Hướng dẫn giải

Gọi J' đối xứng với J qua I, ta có $J'(4; 0)$ và $J' \in CD$.



Ta có: $\overrightarrow{KJ'}=(2;2)$, suy ra phương trình $CD: x-y-4=0$.

Vì $AB//CD$ nên phương trình:

$AB: x-y+4=0$

Do $d(I,AB)=2\sqrt{2}$ nên suy ra $AB=4\sqrt{2} \Rightarrow IA=4$

$A\in AB \Rightarrow A(a;4+a)$, do đó $IA=4 \Leftrightarrow (a-1)^2+(a+3)^2=16$

$\Leftrightarrow a^2+2a-3=0 \Leftrightarrow a=1, a=-3$

Với a = 1, ta có $A(1;3)$, $B(-3;1)$, $C(1;-1)$, $D(5;1)$;

Với a = –3, ta có $A(-3;1)$, $B(1;3)$, $C(5;1)$, $D(1;-1)$.

Dạng 2. Đường tròn

✍ Nhận dạng phương trình đường tròn. Tìm tâm và bán kính đường tròn

Cách 1:

- Đưa phương trình về dạng: $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$ (1)
- Xét dấu biểu thức $P=a^2+b^2-c$

Nếu $P>0$ thì (1) là phương trình đường tròn (C) có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{a^2+b^2-c}$

Nếu $P\le 0$ thì (1) không phải là phương trình đường tròn.

Cách 2: Đưa phương trình về dạng: $(x-a)^2+(y-b)^2=P$ (2).

Nếu $P>0$ thì (2) là phương trình đường tròn có tâm $I(a;b)$ và bán kính $R=\sqrt{P}$

Nếu $P\le 0$ thì (2) không phải là phương trình đường tròn.

✍ Vị trí tương đối của điểm, đường thẳng, đường tròn với đường tròn

- Vị trí tương đối của điểm M và đường tròn (C)

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính IM

+ Nếu $IM<R$ suy ra M nằm trong đường tròn

+ Nếu $IM=R$ suy ra M thuộc đường tròn

+ Nếu $IM>R$ suy ra M nằm ngoài đường tròn

- *Vị trí tương đối giữa đường thẳng Δ và đường tròn (C)*

Xác định tâm I và bán kính R của đường tròn (C) và tính $d(I;\Delta)$

+ Nếu $d(I;\Delta)<R$ suy ra Δ cắt đường tròn tại hai điểm phân biệt

+ Nếu $d(I;\Delta)=R$ suy ra Δ tiếp xúc với đường tròn

+ Nếu $d(I;\Delta) > R$ suy ra Δ không cắt đường tròn

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi đường thẳng Δ và đường tròn (C) bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

- Vị trí tương đối giữa đường tròn (C) và đường tròn (C')

Xác định tâm I, bán kính R của đường tròn (C) và tâm I', bán kính R' của đường tròn (C') và tính II', $R+R'$, $|R-R'|$

+ Nếu $II' > R+R'$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và ở ngoài nhau
+ Nếu $II' = R+R'$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc ngoài với nhau
+ Nếu $II' < |R-R'|$ suy ra hai đường tròn không cắt nhau và lồng vào nhau
+ Nếu $II' = |R-R'|$ suy ra hai đường tròn tiếp xúc trong với nhau
+ Nếu $|R-R'| < II' < R+R'$ suy ra hai đường tròn cắt nhau tại hai điểm phân biệt

Chú ý: Số nghiệm của hệ phương trình tạo bởi đường thẳng (C) và đường tròn (C') bằng số giao điểm của chúng. Tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ.

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ Đề-các Oxy, viết đường tròn

1. Đi qua ba điểm: $M(-2;4), N(5;5), P(6;-2)$
2. Có tâm nằm trên đường thẳng $d: x-6y-10=0$ và tiếp xúc với hai đường thẳng có phương trình $d_1: 3x+4y+5=0$ và $d_2: 4x-3y-5=0$.

Lời giải

1. Cách 1:

Gọi phương trình đường tròn (C) có dạng là: $x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Do đường tròn đi qua ba điểm M,N,P nên ta có hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4+16+4a-8b+c=0 \\ 25+25-10a-10b+c=0 \\ 36+4-12a+4b+c=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=2 \\ b=1 \\ c=-20 \end{cases}$$

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là: $x^2+y^2-4x-2y-20=0$

Cách 2: Gọi $I(x;y)$ và R là tâm và bán kính đường tròn cần tìm

Vì $IM = IN = IP \Leftrightarrow \begin{cases} IM^2 = IN^2 \\ IM^2 = IP^2 \end{cases}$ nên ta có hệ

$$\begin{cases} (x+2)^2+(y-4)^2 = (x-5)^2+(y-5)^2 \\ (x+2)^2+(y-4)^2 = (x-6)^2+(y+2)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

2. Vì đường tròn cần tìm có tâm K nằm trên đường thẳng d nên gọi $K(6a+10;a)$

Mặt khác đường tròn tiếp xúc với d_1, d_2 nên khoảng cách từ tâm K đến hai đường thẳng này bằng nhau và bằng bán kính R suy ra

$$\frac{|3(6a+10)+4a+5|}{5} = \frac{|4(6a+10)-3a-5|}{5} \quad |22a+35| = |21a+35| \Leftrightarrow a=0$$

hoặc $a = \dfrac{-70}{43}$

- Với $a=0$ thì $K(10;0)$ và $R=7$ suy ra $(C): (x-10)^2+y^2=49$
- Với $a = \dfrac{-70}{43}$ thì $K\left(\dfrac{10}{43};\dfrac{-70}{43}\right)$ và $R = \dfrac{7}{43}$ suy ra

$$(C): \left(x-\frac{10}{43}\right)^2 + \left(y+\frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$$

Vậy có hai đường tròn thỏa mãn có phương trình là

$$(C): (x-10)^2+y^2=49 \text{ và } (C): \left(x-\frac{10}{43}\right)^2 + \left(y+\frac{70}{43}\right)^2 = \left(\frac{7}{43}\right)^2$$

Ví dụ 2. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy,

1. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-4x+6y-12=0$. Lập phương trình đường thẳng đi qua $M(1;1)$ và cắt đường tròn (C) tại 2 điểm A,B sao cho $MA = 2MB$
2. Cho hai đường tròn: $(C): x^2+y^2-2x-2y+1=0$, $(C'): x^2+y^2+4x-5=0$ cùng đi qua $M(1;0)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt hai đường tròn lần lượt tại A,B sao cho $MA=2MB$.

Lời giải

1. Gọi d là đường thẳng cần tìm có dạng $ax+by+c=0$, d đi qua $M(1;1)$

Suy ra $d: ax+by-a-b=0$.

Phương tích của điểm M đối với đường tròn :

$\overline{MA}.\overline{MB} = -8 \Leftrightarrow -MA.MB = -8 \Leftrightarrow MB = 2 \Rightarrow AB = 6$

Gọi H là trung điểm AB, ta có: $IH = \sqrt{R^2-AH^2} \Leftrightarrow \dfrac{|a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4$

$$\Leftrightarrow 15a^2 = -8ab \Leftrightarrow a=0 \text{ hoặc } 15a=-8b.$$

$*$ $a=0$ thì $d: y-1=0$ vì $b \neq 0$

$*$ $15a=-8b$ thì $d: 8x-15y+7=0$

Vậy, có 2 đường thẳng cần tìm: $y-1=0$ và $8x-15y+7=0$.

2. (C) có tâm $I(1;1)$, bán kính $R=1$ và (C') có tâm $I'(-2;0)$, bán kính $R'=3$.

Đường thẳng (d) đi qua M có phương trình:

$a(x-1)+b(y-0)=0 \Leftrightarrow ax+by-a=0, \left(a^2+b^2>0\right)\ (*)$.

Gọi H, H' lần lượt là trung điểm AM,BM.

Khi đó: $MA=2MB \Leftrightarrow \sqrt{IA^2-IH^2}=2\sqrt{I'A^2-I'H'^2}$

$\Leftrightarrow 1-\left[d(I,d)\right]^2=4\left\{9-\left[d(I',d)\right]^2\right\}, IA>IH.$

$\Leftrightarrow 4\left[d(I',d)\right]^2-\left[d(I,d)\right]^2=35 \Leftrightarrow 4.\dfrac{9a^2}{a^2+b^2}-\dfrac{b^2}{a^2+b^2}=35$

$\Leftrightarrow \dfrac{36a^2-b^2}{a^2+b^2}=35 \Leftrightarrow a^2=36b^2 \Rightarrow a=\pm 6b$

- * Với $a=-6b \Rightarrow d:\ -6x+y+6=0$
- * Với $a=6b \Rightarrow d:\ 6x+y-6=0$

Vậy, có 2 đường thẳng cần tìm: $-6x+y+6=0,\ 6x+y-6=0$

Ví dụ 3. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2+(y-2)^2=5$. Tìm tọa độ các đỉnh B,C,D của hình chữ nhật ABCD nội tiếp trong (C), có $A(-1;3)$

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;2)$, bán kính $R=\sqrt{5}$

Điểm C đối xứng A qua I $\Rightarrow C(3;1)$.

Đường thẳng BD đi qua I và vuông góc với AC nên nhận $\overrightarrow{AC}=(4;-2)$ làm vectơ pháp tuyến, suy ra (BD): $2x-y=0$

Tọa độ điểm B,D là nghiệm của hệ: $\begin{cases}2x-y=0\\(x-1)^2+(y-2)^2=5\end{cases} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}x=0,y=0\\x=2,y=4\end{array}\right.$

Vậy, $B(0;0)$, $C(3;1)$, $D(2;4)$ hoặc $B(2;4)$, $C(3;1)$, $D(0;0)$ thỏa bài toán.

Ví dụ 4. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy cho $A(7;1)$, B và C là 2 điểm lần lượt thuộc đường thẳng $(d): 2x+y+7=0$ và $(d'):\ 4x+3y-27=0$.

Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết rằng ΔABC có trọng tâm $G\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$

Lời giải

$B\in(d)\Rightarrow B(x_B;-7-2x_B),\ C\in(d')\Rightarrow C\left(x_C;\dfrac{27-4x_C}{3}\right)$

Vì $G\left(\frac{7}{3};\frac{5}{3}\right)$ là trọng tâm ΔABC nên có:

$$\begin{cases}\dfrac{x_A+x_B+x_C}{3}=\dfrac{7}{3}\\[2mm]\dfrac{y_A+y_B+y_C}{3}=\dfrac{5}{3}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B+x_C=0\\3x_B+2x_C=-3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x_B=-3, y_B=-1 \Rightarrow B(-3;-1)\\x_C=3; y_C=5 \Rightarrow C(3;5)\end{cases}$$

Bài toán trở thành: "Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC, biết rằng $A(7;1)$, $B(-3;-1)$, $C(3;5)$".

Gọi $I(a;b)$ là tọa độ tâm đường tròn ngoại tiếp ΔABC.

Ta có: $\begin{cases}IA=IB\\IA=IC\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a+b=2\\5a+b=10\end{cases} \Rightarrow I(2;0) \Rightarrow R=IA=26$

Vậy, phương trình đường tròn cần tìm có tâm $I(2;0)$, bán kính $R=26$

$$(x-2)^2+y^2=26.$$

Ví dụ 5. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn $(C): (x-1)^2+(y+2)^2=5$, $\widehat{ABC}=90^0$, $A(2;0)$ và diện tích tam giác ABC bằng 4. Tìm toạ độ đỉnh B, C.

Lời giải

Đường tròn (C) có tâm $I(1;-2)$ và bán kính $R=\sqrt{5}$.

Vì ABC có $\widehat{ABC}=90^0 \Rightarrow$ C đối xứng A qua tâm $I(1;-2)$, nên $C(0;-4)$.

Phương trình đường thẳng (AC): $2x-y-4=0$

Diện tích tam giác ABC bằng 4, nên khoảng cách từ B đến cạnh AC là:

$$d=\frac{2S}{AC}=\frac{4}{\sqrt{5}}.$$

Do đó B nằm trên đường thẳng (d) // AC nên phương trình (d):

$2x-y+m=0$. (d) cách AC một khoảng bằng $\dfrac{4}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow \dfrac{|4+m|}{\sqrt{5}}=\dfrac{4}{\sqrt{5}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}m=0\\m=-8\end{array}\right.$.

- * Với $m=0 \Rightarrow (d_1):\ 2x-y=0$, toạ độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-y=0\\(x-1)^2+(y+2)^2=5\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=0\\y=0\end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases}x=-\dfrac{6}{5}\\y=-\dfrac{12}{5}\end{cases}.$$

- * Với $m=-8 \Rightarrow (d_2): 2x-y-8=0$, toạ độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}2x-y-8=0\\(x-1)^2+(y+2)^2=5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=-4\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}x=\dfrac{16}{5}\\y=-\dfrac{8}{5}\end{cases}.$$

Vậy toạ độ $C(0;-4)$, toạ độ B hoặc $(0;\ 0)$ hoặc $\left(-\dfrac{6}{5};-\dfrac{12}{5}\right)$ hoặc $(2;-4)$ hoặc $\left(\dfrac{16}{5};-\dfrac{8}{5}\right)$

Ví dụ 6. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2+2x-2y+1=0$. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn (C) xuất phát từ $A(2;-3)$.

Lời giải

(C) có tâm $I(-1;1)$, bán kính $R=1$.

Ta thấy, $IA>R$ nên A nằm ngoài đường tròn. Do đó qua A kẻ được 2 tiếp tuyến đến (C).

Đường thẳng Δ qua A có phương trình: $a(x+2)+b(y+3)=0$

Δ tiếp xúc (C) khi $d(I\,;\Delta)=R\Leftrightarrow\dfrac{|a+4b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=1\Leftrightarrow 8ab+15b^2=0$

$\Leftrightarrow b(8a+15b)=0\Leftrightarrow b=0$ hoặc $b=-\dfrac{8}{15}a$

* Với $b=0\Rightarrow a(x+2)+0(y+3)=0\Rightarrow x+2=0$ vì $a\neq 0$.

* Với $b=-\dfrac{8}{15}a\Rightarrow a(x+2)-\dfrac{8}{15}a(y+3)=0$ hay $15x-8y+6=0$ vì $a\neq 0$.

Vậy, có 2 tiếp tuyến thỏa mãn đề bài: $x+2=0,\ 15x-8y+6=0$.

Bài tập tự luyện

1. Viết phương trình đường tròn (C), biết:

a. (C) đi qua $A(3;\ 4)$ và các hình chiếu của A lên các trục tọa độ.

b. Có tâm nằm trên đường tròn $(C_1):(x-2)^2+y^2=\dfrac{4}{5}$ và tiếp xúc với hai đường thẳng $\Delta_1: x-y=0$ và $\Delta_2: x-7y=0$.

c. Đường tròn đi qua các điểm H, M, N. Biết $A(0;2), B(-2;-2)$, $C(4;-2)$ và H là chân đường cao kẻ từ B; M, N lần lượt là trung điểm của Ab, AC.

d. Tiếp xúc với hai trục tọa độ Ox, Oy đồng thời tiếp xúc ngoài với (C):

$$(x-6)^2+(y-2)^2=4.$$

Hướng dẫn giải

a. Gọi A_1, A_2 lần lượt là hình chiếu của A lên hai trục Ox, Oy suy ra $A_1(3;0)$, $A_2(0;4)$

Giả sử $(C): x^2+y^2-2ax-2by+c=0$.

Do $A, A_1, A_2\in(C)$ nên ta có hệ: $\begin{cases}-6a-8b+c=-25\\-6a+c=-9\\-8b+c=-16\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\dfrac{3}{2}\\b=2\\c=0\end{cases}$.

Vậy phương trình (C): $x^2+y^2-3x-4y=0$.

b. Gọi $I(a;b)$ là tâm của đường tròn (C), vì $I\in(C_1)$ nên: $(a-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5}$ $(*)$

Do (C) tiếp xúc với hai đường thẳng Δ_1,Δ_2 nên $d(I,\Delta_1)=d(I,\Delta_2)$

$\Leftrightarrow\dfrac{|a-b|}{\sqrt{2}}=\dfrac{|a-7b|}{5\sqrt{2}}\Leftrightarrow b=-2a, a=2b$

- $b=-2a$ thay vào $(*)$ ta có được: $(a-2)^2+4a^2=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow 5a^2-4a+\dfrac{16}{5}=0$ phương trình này vô nghiệm.
- $a=2b$ thay vào $(*)$ ta có: $(2b-2)^2+b^2=\dfrac{4}{5}\Leftrightarrow b=\dfrac{4}{5}, a=\dfrac{8}{5}$.

Suy ra $R=d(I,\Delta_1)=\dfrac{4}{5\sqrt{2}}$. Vậy phương trình (C): $\left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{4}{5}\right)^2=\dfrac{8}{25}$.

c. Ta có $M(-1;0), N(1;-2), \overrightarrow{AC}=(4;-4)$. Gọi $H(x;y)$, ta có:

$$\begin{cases}BH\perp AC\\H\in AC\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}4(x+2)-4(y+2)=0\\4x+4(y-2)=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=1\end{cases}\Rightarrow H(1;1)$$

Giả sử phương trình đường tròn: $x^2+y^2+ax+by+c=0$.

Ba điểm M, N, H thuộc đường tròn nên ta có hệ phương trình :

$$\begin{cases}a-c=1\\a-2b+c=-5\\a+b+c=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=1\\c=-2\end{cases}.$$

Phương trình đường tròn: $x^2+y^2-x+y-2=0$.

d. Đường tròn (C) có tâm $I(6;2)$, bán kính $R=2$.

Gọi $(C'):(x-a)^2+(y-b)^2=R'^2$ thì (C') có tâm $I'(a;b)$, bán kính R'.

Vì (C') tiếp xúc với Ox, Oy nên suy ra

$$d(I',Ox)=d(I',Oy)\Leftrightarrow |a|=|b|=R'\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}a=b\\ a=-b\end{array}\right.$$

Hơn nữa (C') tiếp xúc với Ox, Oy và tiếp xúc ngoài với (C) nên (C') nằm bên phải trục Oy, do đó a > 0.

TH1: $a=b=R\Rightarrow (C'):(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

Vì (C') tiếp xúc ngoài với (C) nên: $II'=R+R'$

$\Leftrightarrow \sqrt{(a-6)^2+(a-2)^2}=2+a \Leftrightarrow a=2$ hoặc $a=18$

Trường hợp này có 2 đường tròn là :

$(C_1'):(x-2)^2+(y-2)^2=4$ và $(C_2'):(x-18)^2+(y-18)^2=18^2$.

TH2: $a=-b=R\Rightarrow (C'):(x-a)^2+(y+a)^2=a^2$

Tương tự như trường hợp 1, ta có : $II'=R+R'\Leftrightarrow a=6$

Vậy trường hợp này có 1 đường tròn là $(C_3'):(x-6)^2+(y-6)^2=36$.

Tóm lại , có 3 đường tròn cần tìm là :

$(x-2)^2+(y-2)^2=4$, $(x-18)^2+(y-18)^2=18^2$ và $(x-6)^2+(y-6)^2=36$.

2. Viết phương trình đường tròn (C):

a. Có tâm nằm trên đường thẳng $4x-5y-3=0$ và tiếp xúc với các đường thẳng: $2x-3y-10=0$, $3x-2y+5=0$.

b. Qua điểm $A(-1;5)$ tiếp xúc với các đường thẳng $3x+4y-35=0$, $4x+3y+14=0$.

c. Tiếp xúc với các đường thẳng: $3x+4y-35=0$, $3x-4y-35=0$, $x-1=0$.

Hướng dẫn giải

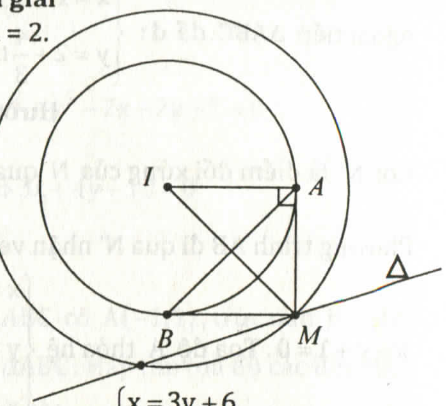
a. $(x-2)^2+(y-1)^2=\frac{81}{13}$, $(x+8)^2+(y+7)^2=\frac{25}{13}$

b. $(x-2)^2+(y-1)^2=25$, $\left(x+\frac{202}{49}\right)^2+\left(y-\frac{349}{49}\right)^2=\left(\frac{185}{49}\right)^2$

c. $\left(x-\frac{35}{3}\right)^2+\left(y-\frac{40}{3}\right)^2=\left(\frac{32}{3}\right)^2$, $(x-5)^2+y^2=16$, $(x+15)^2+y^2=256$

3. Trong mặt phẳng Oxy , cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y-1)^2=4$ và đường thẳng Δ: x – 3y – 6 = 0. Tìm tọa độ điểm M nằm trên Δ, sao cho từ M vẽ được hai tiếp tuyến MA, MB (A, B là tiếp điểm) thỏa ΔABM là tam giác vuông.

Hướng dẫn giải



Đường tròn (C) có tâm I(1; 1), bán kính R = 2.

Vì ΔAMB vuông và IM là đường phân giác của góc $\widehat{AMB}$ nên $\widehat{AMI}=45^0$

Trong tam giác vuông IAM , ta có: $IM=2\sqrt{2}$, suy ra M thuộc đường tròn tâm I bán kính $R'=2\sqrt{2}$.

Mặt khác $M\in\Delta$ nên M là giao điểm của Δ và (I,R'). Suy ra tọa độ của M là nghiệm của hệ

$$\begin{cases}x-3y-6=0\\ (x-1)^2+(y-1)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y+6\\ (3y+5)^2+(y-1)^2=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3y+6\\ 5y^2+14y+9=0\end{cases}$$

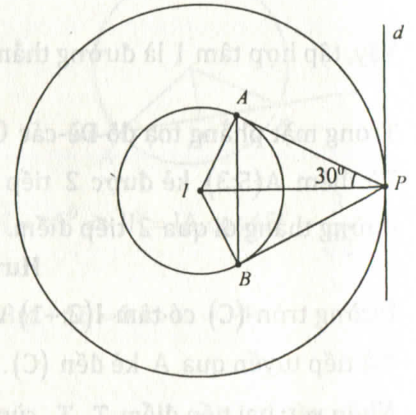
$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}y=-1,x=3\\ y=-\frac{9}{5},x=\frac{3}{5}\end{array}\right.$$

Vậy có hai điểm $M_1(3;-1)$ và $M_2\left(\frac{3}{5};-\frac{9}{5}\right)$ thỏa yêu cầu bài toán.

4. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $(x-1)^2+(y+2)^2=9$ và đường thẳng $d:3x-4y+m=0$. Tìm m để trên d có duy nhất một điểm P mà từ đó có thể kẻ được hai tiếp tuyến PA, PB tới (C) (A, B là các tiếp điểm) sao cho tam giác PAB đều.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm và bán kính lần lượt là: $I(1;-2);R=3$.



Do tam giác PAB đều nên $\widehat{API}=30^0\Rightarrow IP=2IA=2R=6$.

Suy ra P thuộc vào đường tròn (C') có tâm I và bán kính R' = 6.

Mà $P\in d$ nên P chính là giao điểm của đường thẳng d và đường tròn (C'), suy ra trên d có duy nhất điểm P thỏa mãn yêu cầu bài toàn khi và chỉ khi đường thẳng d tiếp xúc với đường tròn (C') tại P, hay là $d(I,d)=6$

$\Leftrightarrow m=19, m=-41$.

5. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy cho ΔABC có $M\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}\right)$ và $N\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ lần lượt là trung điểm của BC và AC. Lập phương trình đường tròn ngoại tiếp ΔABC để d: $\begin{cases} x=1 \\ y=2+\dfrac{4}{3}t \end{cases}$ là đường phân giác trong của $\widehat{BAC}$.

Hướng dẫn giải

Gọi N' là điểm đối xứng của N qua phân giác trong góc A $\Rightarrow N'\left(\dfrac{3}{2};\dfrac{5}{2}\right)$

Phương trình AB đi qua N' nhận vectơ chỉ phương $\overrightarrow{MN}$ có phương trình:

$x-y+1=0$. Tọa độ A thỏa hệ $\begin{cases} x=1 \\ y=2+\dfrac{4}{3}t \\ x-y+1=0 \end{cases} \Rightarrow A(1;2)$.

Từ đây, tìm được $B(3;4), C(0;3)$. Đường tròn: $\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2+\left(y-\dfrac{7}{2}\right)^2=\dfrac{5}{2}$

6. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy cho họ đường cong

$$(C_m):\ x^2+y^2+2mx-2(m-1)y+1=0.$$

Định m để (C_m) là đường tròn tìm tập hợp tâm các đường tròn khi m thay đổi

Hướng dẫn giải

$x^2+y^2+2mx-2(m-1)y+1=0$ có $a=-m,\ b=m-1,\ c=1$

Để để (C_m) là đường tròn thì $a^2+b^2-c=m^2+(m-1)^2-1>0$

$\Leftrightarrow 2m^2-2m>0 \Leftrightarrow m<0$ hoặc $m>1$.

Tâm I: $\begin{cases} x=-m \\ y=m-1 \end{cases} \Rightarrow x+y+1=0$. Điều kiện: $\left[\begin{array}{l} m<0 \\ m>1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-1 \end{array}\right.$

Vậy, tập hợp tâm I là đường thẳng $x+y+1=0$ với $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-1 \end{array}\right.$.

7. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho đường tròn (C): $x^2+y^2-4x+2y-3=0$. Từ điểm $A(5;3)$ kẻ được 2 tiếp tuyến với đường tròn (C). Viết phương trình đường thẳng đi qua 2 tiếp điểm.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$ và bán kính $R=2\sqrt{2}$. Gọi T_1,T_2 là 2 tiếp điểm mà tiếp tuyến qua A kẻ đến (C).

Nhận xét: hai tiếp điểm T_1,T_2 cùng nhìn đoạn IA dưới 1 góc vuông, nên T_1, T_2 thuộc đường tròn đường kính IA. Vậy, đường tròn (C) và đường tròn đường kính IA có 2 điểm chung T_1,T_2. Gọi (C') là đường tròn đường kính IA.

$M(x;y)\in(C') \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}\perp\overrightarrow{AM} \Leftrightarrow \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{AM}=0$ (1)

$\overrightarrow{IM}=(x-2\,;\,y+1),\ \overrightarrow{AM}=(x-5\,;\,y-3)$

$(1)\Leftrightarrow(x-2)(x-5)+(y+1)(y+3)=0\Leftrightarrow x^2+y^2-7x-2y+7=0$

T_1, T_2 thỏa hệ $\begin{cases} x^2+y^2-4x+2y-3=0 \\ x^2+y^2-7x-2y+7=0 \end{cases} \Rightarrow 3x+4y-10=0$

Vậy, $T_1T_2: 3x+4y-10=0$.

8. Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy cho ΔABC có $A(-1;1)$, trực tâm $H(-31;41)$ và tâm $I(16;-18)$ đường tròn ngoại tiếp ΔABC. Hãy tìm tọa độ các đỉnh B, C

Hướng dẫn giải

Gọi A' là điểm đối xứng của A qua tâm $I\Rightarrow A'(33;-37)$

Ta thấy, BHCA' là hình bình hành nên HA' cắt BC tại trung điểm M của BC, khi đó (BC): $3x-4y+5=0$

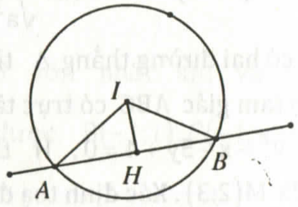
Phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC: $(x-16)^2+(y+18)^2=650$

Tọa độ B, C là nghiệm hệ phương trình: $\begin{cases} 3x-4y+5=0 \\ (x-16)^2+(y+18)^2=650 \end{cases}$

Vậy, $B(-3;-1)$, $C(5;5)$ hoặc ngược lại là tọa độ cần tìm.

9. Cho đường tròn $(C): x^2+y^2-2x+4y-4=0$ có tâm I và đường thẳng $\Delta: \sqrt{2}x+my+1-\sqrt{2}=0$. Tìm m để diện tích tam giác IAB là lớn nhất.

Hướng dẫn giải



Ta có $S_{IAB}=\dfrac{1}{2}IA.IB.\sin\widehat{AIB}=\dfrac{9}{2}\sin\widehat{AIB}\le\dfrac{9}{2}$

Suy ra $\max S_{IAB}=\dfrac{9}{2}$ khi và chỉ khi

$\sin\widehat{AIB}=1 \Leftrightarrow \widehat{AIB}=90^0$.

Gọi H là hình chiếu của I lên Δ. Khi đó $\widehat{AIH}=45^0\Rightarrow IH=IA.\cos45^0=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$

Ta có $d(I;\Delta)=IH\Leftrightarrow\dfrac{|1-2m|}{\sqrt{2+m^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\Leftrightarrow m^2+8m+16=0\Leftrightarrow m=-4$

Vậy với $m=-4$ thỏa mãn yêu cầu bài toán.

10. Cho đường tròn $(C):(x-1)^2+(y+1)^2=25$ và $M(7;3)$. Viết phương trình đường thẳng qua M cắt (C) tại A, B sao cho $MA=3MB$.

Hướng dẫn giải

Dễ thấy M nằm ngoài đường tròn, gọi h là khoảng cách từ I đến đương thẳng cần tìm.

Ta có: $\begin{cases} h^2 + MB^2 = R^2 = 25 \\ h^2 + 4MB^2 = IM^2 = 52 \end{cases} \Rightarrow h = 4$, $M \in d \Rightarrow d: a(x-7) + b(y-3) = 0$

Vì I cách d một khoảng bằng h nên $\frac{|-6a-4b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 4 \Leftrightarrow a = 0$ hoặc $a = -\frac{12}{5}b$

Suy ra $y = 3$ hoặc $12x - 5y - 69 = 0$.

11. Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 15 = 0$ Gọi I là tâm đường tròn (C). Đường thẳng Δ đi qua $M(1;-3)$ cắt (C) tại hai điểm A và B. Viết phương trình đường thẳng Δ biết tam giác IAB có diện tích bằng 8 và cạnh AB là cạnh lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;-1)$, bán kính $R = 2\sqrt{5}$. Gọi H là trung điểm AB.

Đặt $AH = x\left(0 < x < 2\sqrt{5}\right)$.

Khi đó: ta có, $\frac{1}{2}IH.AB = 8 \Leftrightarrow x\sqrt{20 - x^2} = 8 \Leftrightarrow x = 4$ hoặc $x = 2$ (không thỏa $AB < IA$). Suy ra $AH = 4 \Rightarrow IH = 2$.

Phương trình đường thẳng qua M: $a(x-1) + b(y+3) = 0\left(a^2 + b^2 > 0\right)$

Ta có $d(I, AB) = IH = 2 \Leftrightarrow \frac{|a+2b|}{\sqrt{a^2+b^2}} = 2 \Leftrightarrow a(3a - 4b) = 0$.

Vậy có hai đường thẳng Δ thỏa mãn là $y + 3 = 0$ và $4x + 3y + 5 = 0$.

12. Cho tam giác ABC có trực tâm H. Biết đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC là $x^2 + y^2 - x - 5y + 4 = 0$, H thuộc đường thẳng $\Delta: 3x - y - 4 = 0$, trung điểm AB là $M(2;3)$. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác.

Hướng dẫn giải

Tâm $I\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$ của đường tròn và $H(2;2)$ là giao điểm của Δ và đường tròn HBC.

Gọi $N(a;b)$ là trung điểm của BC.

Ta có: $\overrightarrow{HA} = 2\overrightarrow{IN} \Rightarrow A(2a+1;2b-3) \Rightarrow B(3-2a;9-2b)$.

Vì $B \in (HBC)$ nên $(3-2a)^2 + (9-2b)^2 - (3-2a) - 5(9-2b) + 4 = 0$

$$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 5a - 13b + 23 = 0 \quad (1).$$

Ta có: $\overrightarrow{BN} = (3a-3;3b-9)$ và $BN \perp AH$ nên $\overrightarrow{BN}.\overrightarrow{AH} = 0$.

$(2a-1)(3a-3) + (2b-5)(3b-9) = 0 \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 - 3a - 11b + 16 = 0$ (2)

Từ (1) và (2) giải ra được $b = 3 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$ hoặc $b = \frac{5}{2} \Rightarrow a = 1$.

Với $b = 3 \Rightarrow B(2;3) \equiv M$ (loại). Với $b = \frac{5}{2} \Rightarrow B(1;4), A(3;2), C(1;1)$

13. Trong mặt phẳng Oxy, cho điểm $A(1; 0)$ và các đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 2$ và $(C'): x^2 + y^2 = 5$. Tìm tọa độ các điểm B và C lần lượt nằm trên các đường tròn (C) và (C') để tam giác ABC có diện tích lớn nhất.

Hướng dẫn giải

- Giả sử ΔABC có diện tích lớn nhất. Khi đó $CO \perp AB, BO \perp AC$ (Vì nếu không, chẳng hạn CO không vuông góc với AB thì tồn tại điểm C' thuộc đường tròn (C') sao cho $C'O \perp AB$ và $d(C';AB) > d(C;AB) \Rightarrow S_{C'AB} > S_{CAB}$)

  Suy ra ΔABC có diện tích lớn nhất thì O là trực tâm của tam giác do đó $BC \perp OA \Rightarrow x_B = x_C$.

- Ta có $\overrightarrow{AB}(x_B - 1;y_B), \overrightarrow{OC}(x_B;y_C), \overrightarrow{OB}(x_B;y_B), \overrightarrow{AC}(x_B - 1;y_C)$

  $CO \perp AB \Rightarrow x_B(x_B - 1) + y_B y_C = 0$ (1)

  Lại có $B \in (C), C \in (C')$ suy ra $x_B^2 + y_B^2 = 2$ (2) và $x_C^2 + y_B^2 = 2$ (3)

  Từ (1), (2) và (3) suy ra $x_B = -1, x_B = \frac{5-\sqrt{5}}{2}$ (loại)

  Ta có $S = \frac{1}{2}|x_A - x_B||y_C - y_B| \Rightarrow S^2 = \frac{1}{4}(1 - x_B)^2(7 - 2x_B)$

  Nếu $x_B = -1 \Rightarrow S = 3; x_B = \frac{5-\sqrt{5}}{2} \Rightarrow S < 3$ nên S lớn nhất khi và chỉ khi $x_B = x_C = -1$ khi đó ta có ta xác định được $B(-1;1), C(-1;-2)$ hoặc $B(-1;-1), C(-1;2)$ là điểm cần tìm.

14. Trong mặt phẳng Oxy, cho đường tròn $(C): (x-1)^2 + (y-2)^2 = 25$. Từ $E(-6;2)$ vẽ hai tiếp tuyến EA, EB (A, B là tiếp điểm) đến (C). Viết phương trình đường thẳng AB.

Hướng dẫn giải

Gọi $A(a;b)$. Ta có:

$$\begin{cases} A \in (C) \\ \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{NA} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)^2 + (b-2)^2 = 25 \\ (a-1)(a+6) + (b-2)(b-1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 - 2a - 4b - 20 = 0 \\ a^2 + b^2 + 5a - 3b - 4 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow 7a + b + 16 = 0$

Từ đó ta suy ra được $A\in\Delta:7x+y+16=0$.

Tương tự ta cũng có được $B\in\Delta\Rightarrow AB\equiv\Delta\Rightarrow AB:7x+y+16=0$.

15. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C):(x-1)^2+y^2=2$ và hai điểm $A(1;-1)$, $B(2;2)$. Tìm tọa điểm M thuộc đường tròn (C) sao cho diện tích tam giác MAB bằng $\frac{1}{2}$.

Hướng dẫn giải

Ta có $AB=\sqrt{10}$ và $S_{\Delta MAB}=\frac{1}{2}d(M,AB).AB=\frac{1}{2}\Rightarrow d(M,AB)=\frac{1}{\sqrt{10}}$

Lại có $\overrightarrow{AB}=(1;3)$ nên $\vec{n}=(3;-1)$ là VTPT của đường thẳng AB.

Suy ra phương trình AB: $3(x-1)-(y+1)=0$ hay $3x-y-4=0$.

Gọi $M(a;\,b)\in(C)\Rightarrow(a-1)^2+b^2=2$

Khi đó $d(M,AB)=\frac{1}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow\frac{|3a-b-4|}{\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\Leftrightarrow|3a-b-4|=1$

Ta có hệ phương trình: $\begin{cases}(a-1)^2+b^2=2\\|3a-b-4|=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+b^2=2\\3a-b-4=1\end{cases}$ hoặc

$\begin{cases}(a-1)^2+b^2=2\\3a-b-4=-1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+b^2=2\\b=3a-5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}(a-1)^2+b^2=2\\b=3a-3\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}(a-1)^2+(3a-5)^2=2\\b=3a-5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}(a-1)^2+(3a-3)^2=2\\b=3a-3\end{cases}$

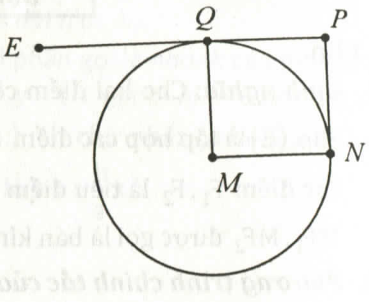
$\Leftrightarrow\begin{cases}5a^2-16a+12=0\\b=3a-5\end{cases}$ hoặc $\begin{cases}5a^2-10a+4=0\\b=3a-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{12}{5},a=\frac{4}{5}\\b=3a-5\end{cases}$

hoặc $\begin{cases}a=\frac{5\pm\sqrt{5}}{5}\\b=3a-3\end{cases}$. Vậy có bốn điểm thỏa điều kiện bài toán là:

$M_1\left(\frac{12}{5};\frac{11}{5}\right)$, $M_2\left(\frac{4}{5};-\frac{13}{5}\right)$, $M_3\left(\frac{5-\sqrt{5}}{5};\frac{-3\sqrt{5}}{5}\right)$ và $M_4\left(\frac{5+\sqrt{5}}{5};\frac{3\sqrt{5}}{5}\right)$.

. Trong mặt phẳng Oxy, đường tròn $(C):(x-2)^2+(y-1)^2=10$. Tìm tọa độ các đỉnh của hình vuông MNPQ, biết M trùng với tâm của đường tròn (C), hai đỉnh N, Q thuộc đường tròn (C), đường thẳng PQ đi qua $E(-3;6)$ và $x_Q>0$.

Hướng dẫn giải



Ta có $M(2;1)$ và EQ là tiếp tuyến của (C).

Phương trình EQ có dạng: $a(x+3)+b(y-6)=0$

Vì $d(M,EQ)=\sqrt{10}$ nên có:

$\frac{|5a-5b|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{10}\Leftrightarrow(5a-5b)^2=10(a^2+b^2)$

$\Leftrightarrow3a^2-10ab+3b^2=0\Leftrightarrow a=3b$ hoặc $b=3a$

- $a=3b$, ta có phương trình $EQ:3x+y+3=0$. Khi đó tọa độ Q là nghiệm của hệ $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=10\\3x+y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-1\\y=0\end{cases}$. Trường hợp này ta loại vì $x_Q>0$.
- $b=3a$, ta có phương trình $EQ:x+3y-15=0$. Khi đó tọa độ Q là nghiệm của hệ: $\begin{cases}(x-2)^2+(y-1)^2=10\\3x+y+3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=3\\y=4\end{cases}\Rightarrow Q(3;4)$.

Ta có $P(15-3x;x)$ và $QP=MQ\Rightarrow(12-3x)^2+(4-x)^2=10\Leftrightarrow x=3,x=5$

- $x=3$, ta có $P(6;\,3)$, suy ra tâm của hình vuông $I(4;2)$ nên $N(5;0)$
- $x=5$, ta có $P(0;5)$, suy ra tâm của hình vuông $I(1;3)$ nên $N((-1;2))$.

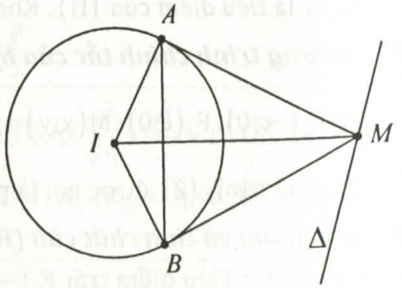
Vậy có hai bộ điểm thỏa yêu cầu bài toán:

$M(-1;2),N(5;0),P(6;3),Q(3;4)$ và $M(2;1),N(-1;2),P(0;5),Q(3;4)$.

17. Cho đường thẳng $\Delta:x+y+2=0$ và đường tròn (C): $x^2+y^2-4x-2y=0$. Gọi I là tâm và M thuộc đường thẳng Δ. Qua M kẻ tiếp tuyến MA, MB. Tìm M sao cho diện tích tứ giác MAIB bằng 10.

Hướng dẫn giải

Đường tròn (C) có tâm $I(2;1)$, bán kính $R=\sqrt{5}\Rightarrow AI=\sqrt{5}$.



$S_{\Delta MAI}=\frac{1}{2}S_{AIBM}=5\Rightarrow\frac{1}{2}MA.IA=5$

$\Rightarrow MA=2\sqrt{5}$. Suy ra $IM^2=IA^2+AM^2=25$.

Mà $M\in\Delta$ nên $M(m;-m-2)$,

suy ra $IM^2=25\Leftrightarrow(m-2)^2+(m+3)^2=25$

$\Leftrightarrow m^2+m-6=0\Leftrightarrow m=-3,m=2$.

Vậy $M(2;-4)$ và $M(-3;1)$ là hai điểm cần tìm.

Dạng 3. Ba đường cônic

I. Elip.

1. Định nghĩa: Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c\left(c>0\right)$ và hằng số $a > c$.

Elip (E) là tập hợp các điểm M thỏa mãn $MF_1 + MF_2 = 2a$.

Các điểm F_1, F_2 là tiêu điểm của (E). Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ là tiêu cự của (E). MF_1, MF_2 được gọi là bán kính qua tiêu.

2. Phương trình chính tắc của elip:

Với $F_1(-c;0), F_2(c;0)$: $M(x;y)\in(E) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ (1) trong đó $b^2 = a^2 - c^2$.

Phương trình (1) được gọi là phương trình chính tắc của (E):

3. Hình dạng và tính chất của elip:

Elip có phương trình (1) nhận các trục tọa độ là trục đối xứng và gốc tọa độ làm tâm đối xứng.

- Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$
- Các đỉnh : $A_1(-a;0), A_2(a;0), B_1(0;-b), B_2(0;b)$
- Trục lớn : $A_1A_2 = 2a$, nằm trên trục Ox ; trục nhỏ : $B_1B_2 = 2b$, nằm trên trục Oy
- Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là *hình chữ nhật cơ sở*
- Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} < 1$
- Bán kính qua tiêu điểm của điểm $M(x_M;y_M)$ thuộc (E) là:

$$MF_1 = a + ex_M = a + \frac{c}{a}x_M,\ MF_2 = a - ex_M = a - \frac{c}{a}x_M$$

II. Hypebol

1. Định nghĩa: Cho hai điểm cố định F_1, F_2 với $F_1F_2 = 2c\left(c>0\right)$ và hằng số $a < c$.

Hypebol là tập hợp các điểm M thỏa mãn $\left|MF_1 - MF_2\right| = 2a$. Kí hiệu (H). Ta gọi: F_1, F_2 là *tiêu điểm* của (H). Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ là *tiêu cự* của (H).

2. Phương trình chính tắc của hypebol:

Với $F_1(-c;0), F_2(c;0)$: $M(x;y)\in(H) \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ với $b^2 = c^2 - a^2$ (2)

Phương trình (2) được gọi là phương trình chính tắc của hypebol

3. Hình dạng và tính chất của (H):

- Tiêu điểm: Tiêu điểm trái $F_1(-c;0)$, tiêu điểm phải $F_2(c;0)$
- Các đỉnh : $A_1(-a;0), A_2(a;0)$

- Trục Ox gọi là *trục thực*, Trục Oy gọi là *trục ảo* của hypebol. Khoảng cách $2a$ giữa hai đỉnh gọi là *độ dài trục thực*, $2b$ gọi là *độ dài trục ảo*.
- Hypebol gồm hai phần nằm hai bên trục ảo, mỗi phần gọi là *nhánh* của hypebol
- Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là *hình chữ nhật cơ sở*. Hai đường thẳng chứa hai đường chéo của hình chữ nhật cơ sở gọi là hai *đường tiệm cận* của hypebol và có phương trình là $y = \pm\dfrac{b}{a}x$
- Tâm sai : $e = \dfrac{c}{a} > 1$
- $M(x_M;y_M)$ thuộc (H) thì: $MF_1 = \left|a + ex_M\right| = \left|a + \dfrac{c}{a}x_M\right|, MF_2 = \left|a - ex_M\right| = \left|a - \dfrac{c}{a}x_M\right|$

III. Parabol

1. Định nghĩa: Cho điểm cố định F và đường thẳng cố định Δ không đi qua F. *Parabol (P)* là tập hợp các điểm M cách đều điểm F và đường thẳng Δ. Điểm F gọi là *tiêu điểm* của parabol.

Đường thẳng Δ được gọi là *đường chuẩn* của parabol;

$p = d(F;\Delta)$ được gọi là *tham số tiêu* của parabol.

2. Phương trình chính tắc của parabol:

Với $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$ và $\Delta: x = -\dfrac{p}{2}\left(p>0\right)$

$M(x;y)\in(P) \Leftrightarrow y^2 = 2px$ (3)

(3) được gọi là phương trình chính tắc của parabol

3. Hình dạng và tính chất của parabol:

- Tiêu điểm $F\left(\dfrac{p}{2};0\right)$
- Phương trình đường chuẩn: $\Delta: x = -\dfrac{p}{2}$
- Gốc tọa độ O được gọi là đỉnh của parabol
- Ox được gọi là trục đối xứng
- $M(x_M;y_M)$ thuộc (P) thì: $MF = d(M;\Delta) = x_M + \dfrac{p}{2}$

Ví dụ 1. Trong mặt phẳng toạ Đề-các Oxy, cho elip $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1$. Giả sử (d): $2x + 15y - 10 = 0$ cắt elip tại 2 điểm phân biệt A $(x_A > 0)$ và B. Tìm trên elip điểm C sao cho ΔABC cân tại A.

Lời giải

Tọa độ điểm A và B là nghiệm hệ:

$$\begin{cases} 2x+15y-10=0 \\ \dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{10-15y}{2} \\ 4x^2+25y^2=100 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=0, x=5 \\ y=\dfrac{6}{5}, x=-4 \end{array}\right.$$

Theo đề bài, ta có: $A(5;0)$ và $B\left(-4;\dfrac{6}{5}\right)$.

Gọi $C(x_C;y_C)$ là tọa độ cần tìm.

Ta có: $\begin{cases} \dfrac{x_C^2}{25}+\dfrac{y_C^2}{4}=1 \\ AC=AB \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x_C^2}{25}+\dfrac{y_C^2}{4}=1 \\ (x_C-5)^2+y_C^2=\left(\dfrac{3\sqrt{229}}{5}\right)^2 \end{cases} \Rightarrow x=-4, y=\pm\dfrac{6}{5}$

Vậy, $C\left(-4;-\dfrac{6}{5}\right)$ là tọa độ cần tìm.

> **Ví dụ 2.** Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho hypebol $\dfrac{x^2}{9}-\dfrac{y^2}{6}=1$. Tìm điểm M trên hypebol sao cho tổng khoảng cách từ M đến 2 đường tiệm cận bằng $\dfrac{24\sqrt{2}}{5}$.

Lời giải

Phương trình hai tiệm cận là : $d_1: y=\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$, $d_2: y=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}x$.

Giả sử $M(x_M;y_M)\in(H)$ suy ra

$$\frac{{x_M}^2}{9}-\frac{{y_M}^2}{6}=1 \Leftrightarrow \left(\sqrt{6}x_M-3y_M\right)\left(\sqrt{6}x_M+3y_M\right)=54>0 \quad (1)$$

Tổng khoảng cách từ $M(x_M;y_M)$ đến hai đường tiệm cận bằng $\dfrac{24\sqrt{2}}{5}$:

$$\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M-y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}+\frac{\left|\frac{\sqrt{6}}{3}x_M+y_M\right|}{\sqrt{1+\frac{2}{3}}}=\frac{24\sqrt{2}}{5} \Leftrightarrow \left|\sqrt{6}x_M-3y_M\right|+\left|\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5} \quad (2).$$

Từ (1) và (2) suy ra:

$$\left|\sqrt{6}x_M-3y_M+\sqrt{6}x_M+3y_M\right|=\frac{24\sqrt{30}}{5} \Leftrightarrow x_M=\pm\frac{12}{\sqrt{5}} \Rightarrow y_M=\pm\frac{\sqrt{330}}{5}$$

Vậy có bốn điểm $M_1\left(\dfrac{12}{\sqrt{5}};\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_2\left(\dfrac{12}{\sqrt{5}};-\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$, $M_3\left(-\dfrac{12}{\sqrt{5}};\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$,

và $M_4\left(-\dfrac{12}{\sqrt{5}};-\dfrac{\sqrt{330}}{5}\right)$ thỏa mãn yêu cầu bài toán .

> **Ví dụ 3.** Trong mặt phẳng toạ độ Đề-các Oxy, cho parabol $y^2=8x$. Tìm điểm M nằm trên parabol và một điểm N nằm trên đường thẳng $\Delta: 4x-3y+5=0$ sao cho đoạn MN ngắn nhất .

Lời giải

Với mọi điểm $M\in(P), N\in\Delta$ ta luôn có $MN\ge d(M;\Delta)$.

$M\in(P)\Rightarrow M\left(\dfrac{m^2}{8};m\right)$ với $m\ge 0$,

khi đó $d(M;\Delta)=\dfrac{\left|4.\dfrac{m^2}{8}-3.m+5\right|}{5}=\dfrac{(m-3)^2+1}{10}\ge\dfrac{1}{10}$

MN nhỏ nhất khi và chỉ khi $M\left(\dfrac{9}{8};3\right)$ và N là hình chiếu của M lên Δ.

Đường thẳng đi qua M vuông góc với Δ nhận $\vec{u}(3;4)$ làm vectơ pháp tuyến nên có phương trình là $3\left(x-\dfrac{9}{8}\right)+4(y-3)=0$. hay $24x+32y-123=0$

Tọa độ điểm N là nghiệm của hệ $\begin{cases} 4x-3y+5=0 \\ 24x+32y-123=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{209}{200} \\ y=\dfrac{153}{50} \end{cases}$

Vậy , $M\left(\dfrac{9}{8};3\right)$, $N\left(\dfrac{209}{200};\dfrac{153}{50}\right)$ là tọa độ cần tìm thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Bài tập tự luyện

1. Viết phương trình chính tắc của elip trong mỗi trường hợp:

a. Có tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ và hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20.

b. Đi qua $M\left(\dfrac{3\sqrt{14}}{4};-\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M.

Hướng dẫn giải

a. (E) có tâm sai bằng $\dfrac{\sqrt{5}}{3}$, suy ra $\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ hay $4a^2=9b^2$ (1)

Hình chữ nhật cơ sở của (E) có chu vi bằng 20 suy ra $4(a+b)=20$ (2)

Từ (1) và (2) suy ra $a=3, b=2$

Vậy phương trình chính tắc (E) là $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

b. $M\in(E)\Rightarrow\frac{63}{a^2}+\frac{1}{b^2}=8$, tam giác MF_1F_2 vuông tại M .

$$\Rightarrow\overrightarrow{F_1M}.\overrightarrow{F_2M}=0\Leftrightarrow c^2=8=a^2-b^2\Rightarrow a^2=9,b^2=1\Rightarrow(E):\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{1}=1$$

2. **Viết phương trình chính tắc của hypebol trong mỗi trường hợp:**

a. Đi qua $M(-2;1)$ và góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0 .

b. Khoảng cách giữa các đường chuẩn là $\frac{32}{\sqrt{7}}$ và phương trình 2 đường tiệm cận là $3x\pm4y=0$.

Hướng dẫn giải

a. $M(-2;1)\in(H)$ nên $\frac{4}{a^2}-\frac{1}{b^2}=1\quad(*)$

Phương trình hai đường tiệm cận là:

$\Delta_1:y=\frac{b}{a}x$ hay $bx-ay=0$; $\Delta_2:y=-\frac{b}{a}x$ hay $bx+ay=0$

Vì góc giữa hai đường tiệm cận bằng 60^0 nên $\cos60^0=\frac{|b^2-a^2|}{b^2+a^2}$

Hay $\frac{1}{2}=\frac{|b^2-a^2|}{b^2+a^2}\Leftrightarrow2|b^2-a^2|=a^2+b^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}b^2=3a^2\\a^2=3b^2\end{array}\right.$

+ Với $b^2=3a^2$ thay vào $(*)$ suy ra hypebol là $\frac{x^2}{\frac{11}{3}}-\frac{y^2}{11}=1$

+ Với $a^2=3b^2$ thay vào $(*)$ suy ra hypebol là $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$

Vậy có có hai hypebol thỏa mãn : $\frac{x^2}{\frac{11}{3}}-\frac{y^2}{11}=1$ và $\frac{x^2}{1}-\frac{y^2}{\frac{1}{3}}=1$

3. **Viết phương trình chính tắc của parabol trong trường hợp: Khoảng cách từ tiêu điểm F đến đường thẳng $\Delta:x+y-12=0$ là $2\sqrt{2}$.**

Hướng dẫn giải

Ta có tọa độ tiêu điểm $F\left(\frac{p}{2};0\right)$

Khoảng cách từ F đến đường thẳng Δ bằng $2\sqrt{2}$ nên:

$$d(F;\Delta)=\frac{\left|\frac{p}{2}-12\right|}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$ suy ra $p=16$ hoặc $p=32$.

Vậy phương trình của (P): $y^2=32x$ hoặc $y^2=64x$

4. **Trong mặt phẳng Oxy , cho elip: $9x^2+25y^2=225$ .Tìm các điểm M trên (E) sao cho diện tích tứ giác $OHMK$ lớn nhất với H, K là hình chiếu của điểm M lên hai trục tọa độ.**

Hướng dẫn giải

$S_{OHMK}=|x_My_M|$. Theo BĐT Côsi , ta có:

$$9x_M^2+25y_M^2=225\geq2\sqrt{9x_M^2.25y_M^2}=30\sqrt{x_My_M}\Rightarrow x_My_M\leq\frac{15}{2}$$

Dấu bằng xảy ra khi và chỉ khi $9x_M^2=25y_M^2\Rightarrow x_M=\pm\frac{5}{\sqrt{2}},y_M=\pm\frac{3}{\sqrt{2}}$

5. **Trong mặt phẳng Oxy , cho hypebol (H): $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{4}=1$ và $A(3;2),B(0;1)$ .Tìm các điểm $C\in(H)$ sao cho ΔABC có diện tích nhỏ nhất.**

Hướng dẫn giải

$AB:x-y+1=0;AB=3\sqrt{2}$, $C(x_0;y_0)\in(H)\Rightarrow\frac{x_0^2}{7}-\frac{y_0^2}{4}=1$

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}AB.d(C;AB)=\frac{3}{2}|x_0-y_0-1|$$

Đặt $P=x_0-y_0-1$, suy ra hệ $\begin{cases}\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{4}=1\\P=x-y-1\end{cases}$ có nghiệm với tham số P.

Từ đây suy ra $P\geq\sqrt{3}-1$ hoặc $P\leq-\sqrt{3}-1$ do đó $|P|\geq\sqrt{3}-1$

Vậy $C\left(\frac{7}{\sqrt{3}};\frac{4}{\sqrt{3}}\right)$ thì ΔABC có diện tích nhỏ nhất.

6. **Cho parabol (P): $y^2=4x$ và điểm $I(0;1)$ .Tìm A, B trên (P) sao cho: $\overrightarrow{IA}=4\overrightarrow{IB}$.**

Hướng dẫn giải

Vì $A,B\in(P)\Rightarrow A\left(\frac{a^2}{4};a\right),B\left(\frac{b^2}{4};b\right),\overrightarrow{IA}\left(\frac{a^2}{4};a-1\right);\overrightarrow{IB}\left(\frac{b^2}{4};b-1\right)$

$$\Rightarrow\overrightarrow{IA}=4\overrightarrow{IB}\Leftrightarrow\begin{cases}\frac{a^2}{4}=b^2\\a-1=4(b-1)\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=-1\\b=\frac{1}{2}\end{cases}\text{ hoặc }\begin{cases}a=3\\b=\frac{3}{2}\end{cases}.$$

Chuyên đề VIII

TỔ HỢP – XÁC SUẤT

Dạng 1. Tổ hợp

1. Quy tắc cộng

1.1. Định nghĩa: Xét một công việc H.

Giả sử H có k phương án $H_1, H_2, ..., H_k$ thực hiện công việc H. Nếu có m_1 cách thực hiện phương án H_1, có m_2 cách thực hiện phương án H_2,..., có m_k cách thực hiện phương án H_k và mỗi cách thực hiện phương án H_i không trùng với bất kì cách thực hiện phương án H_j $(i \neq j; i, j \in \{1, 2, ..., k\})$ thì có $m_1 + m_2 + ... + m_k$ cách thực hiện công việc H.

2.1. Công thức quy tắc cộng

Nếu các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ đôi một rời nhau. Khi đó:

$$|A_1 \cup A_2 \cup ... \cup A_n| = |A_1| + |A_2| + ... + |A_n|$$

Trong đó kí hiệu $|X|$ là chỉ số phần tử của tập X.

2. Quy tắc nhân.

1.2. Định nghĩa: Giả sử một công việc H bao gồm k công đoạn $H_1, H_2, ..., H_k$. Công đoạn H_1 có m_1 cách thực hiện, công đoạn H_2 có m_2 cách thực hiện,..., công đoạn H_k có m_k cách thực hiện. Khi đó công việc H có thể thực hiện theo $m_1.m_2...m_k$ cách.

2.2. Công thức quy tắc nhân

Nếu các tập $A_1, A_2, ..., A_n$ đôi một rời nhau.

Khi đó: $|A_1 \cap A_2 \cap ... \cap A_n| = |A_1|.|A_2|.....|A_n|$.

3. Giai thừa

1.3. Định nghĩa: Với mọi số tự nhiên dương n, tích $1.2.3....n$ được gọi là n - giai thừa và kí hiệu $n!$. Vậy $n! = 1.2.3...n$.

Ta quy ước $0! = 1$.

2.3. Tính chất:

- $n! = n(n-1)!$
- $n! = n(n-1)(n-2)...(n-k-1).k!$.

4. Hoán vị

1.4. Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử $(n \geq 1)$. Khi sắp xếp n phần tử này theo một thứ tự ta được một hoán vị các phần tử của tập A.

Kí hiệu số hoán vị của n phần tử là P_n.

2.4. Số hoán vị của tập n phần tử:

Định lí: Ta có $P_n = n!$

5. Chỉnh hợp

1.5. Định nghĩa: Cho tập A gồm n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Khi lấy k phần tử của A và sắp xếp chúng theo một thứ tự ta được một chỉnh hợp chập k của n phần tử của A.

2.5. Số chỉnh hợp

Kí hiệu A_n^k là số chỉnh hợp chập k của n phần tử

Định lí: Ta có $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

6. Tổ hợp

6.1. Định nghĩa: Cho tập A có n phần tử và số nguyên k với $1 \leq k \leq n$. Mỗi tập con của A có k phần tử được gọi là một tổ hợp chập k của n phần tử của A.

6.2. Số tổ hợp

Kí hiệu C_n^k là số tổ hợp chập k của n phần tử.

Định lí: Ta có: $C_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!k!}$.

7. Nhị thức Newton

7.1 Định lí: Với mọi $a, b \in \mathbb{R}$; $n \in \mathbb{N}$. Ta có:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + ... + C_n^{n-1} a b^{n-1} + C_n^n b^n$$

7.2. Nhận xét

Trong khai triển Newton $(a+b)^n$ có các tính chất sau

- Gồm có $n+1$ số hạng
- Số mũ của a giảm từ n đến 0 và số mũ của b tăng từ 0 đến n
- Tổng các số mũ của a và b trong mỗi số hạng bằng n
- Các hệ số có tính đối xứng: $C_n^k = C_n^{n-k}$
- Số hạng tổng quát: $T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k$

7.3. Một số hệ quả

Hệ quả: Ta có: $(1+x)^n = C_n^0 + xC_n^1 + x^2 C_n^2 + ... + x^n C_n^n$

Từ khai triển này ta có các kết quả sau

- $C_n^0 + C_n^1 + ... + C_n^n = 2^n$

Từ đó suy ra số tập con của tập gồm n phần tử bằng 2^n

- $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - ... + (-1)^n C_n^n = 0$

Ví dụ 1. Hai nhóm người cần mua nền nhà, nhóm thứ nhất có 2 người và họ muốn mua 2 nền kề nhau, nhóm thứ hai có 3 người và họ muốn mua 3 nền kề nhau. Họ tìm được một lô đất chia thành 7 nền đang rao bán (các nền như nhau và chưa có người mua). Tính số cách chọn nền của mỗi người thỏa yêu cầu trên.

Lời giải

Xem lô đất có 4 vị trí gồm 2 vị trí 1 nền, 1 vị trí 2 nền và 1 vị trí 3 nền.

Bước 1: nhóm thứ nhất chọn 1 vị trí cho 2 nền có 4 cách và mỗi cách có $2!=2$ cách chọn nền cho mỗi người. Suy ra có $4.2=8$ cách chọn nền.

Bước 2: nhóm thứ hai chọn 1 trong 3 vị trí còn lại cho 3 nền có 3 cách và mỗi cách có $3!=6$ cách chọn nền cho mỗi người. Suy ra có $3.6=18$ cách chọn nền.

Vậy có $8.18=144$ cách chọn nền cho mỗi người.

Ví dụ 2. Từ 4 chữ số 0, 1, 2, 3 lập thành các số tự nhiên có 3 chữ số phân biệt. Tính tổng các số được thành lập.

Lời giải

Cách 1:

Xét số A có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm có thể là 0.

- Số các số A là $A_4^3=24$ số. Số lần các chữ số có mặt ở hàng trăm, hàng chục và đơn vị là như nhau và bằng $24:4=6$ lần.
- Tổng các chữ số hàng trăm (hàng chục, đơn vị) của 24 số là:

$$6.(0+1+2+3)=36.$$

Suy ra tổng các số A là $36.(100+10+1)=3996$.

Xét số B có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm là 0.

- Số các số B là $A_3^2=6$ số. Số lần các chữ số 1,2,3 có mặt ở hàng chục và đơn vị là như nhau và bằng $6:3=2$ lần.
- Tổng các chữ số hàng chục (đơn vị) của 6 số là $2.(1+2+3)=12$.

Suy ra tổng các số B là $12.(10+1)=132$.

Vậy tổng các số thỏa yêu cầu là $3996-132=3864$.

Cách 2:

Xét số A có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm có thể là 0.

Từ $A_4^3=24$ số A ta lập được 12 cặp số có tổng là 333. Ví dụ $012+321=333$.

Suy ra tổng các số A là $12.333=3996$.

Xét số B có 3 chữ số phân biệt và chữ số hàng trăm là 0.

Từ $A_3^2=6$ số B ta lập được 3 cặp số có tổng là 44. Ví dụ $032+012=44$.

Suy ra tổng các số B là $3.44=132$.

Vậy tổng các số thỏa yêu cầu là $3996-132=3864$.

Ví dụ 3. Tính số hình chữ nhật được tạo thành từ 4 trong 20 đỉnh của đa giác đều có 20 cạnh nội tiếp đường tròn tâm O.

Lời giải

Nhận thấy các hình chữ nhật được tạo thành có 2 đường chéo là đường kính của đường tròn. Vẽ đường thẳng d qua tâm O và không qua đỉnh của đa giác đều thì d chia đa giác thành 2 phần, mỗi phần có 10 đỉnh. Suy ra số đường chéo của đa giác đi qua tâm O là 10. Chọn 2 trong 10 đường chéo thì lập được 1 hình chữ nhật.

Vậy có $C_{10}^2=45$ hình chữ nhật.

Ví dụ 4. Một nhóm có 7 nam và 6 nữ. Chọn ra 3 người sao cho trong đó có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách.

Lời giải

Chọn 3 người tùy ý trong 13 người có C_{13}^3 cách.

Chọn 3 nam (không có nữ) trong 7 nam có C_7^3 cách.

Vậy, $C_{13}^3-C_7^3=251$ cách chọn.

Ví dụ 5. Từ một nhóm 12 học sinh gồm 4 học sinh khối A, 4 học sinh khối B và 4 học sinh khối C chọn ra 5 học sinh sao cho mỗi khối có ít nhất 1 học sinh. Tính số cách chọn.

Lời giải

Chọn 5 học sinh tùy ý có $C_{12}^5=792$ cách.

Chọn 5 học sinh khối A và B (tương tự khối A và C, B và C) có $C_8^5=56$ cách

Vậy có $792-3.56=624$ cách.

Ví dụ 6. Đội tuyển học sinh giỏi của một trường gồm 18 em, trong đó có 7 em khối 12, 6 em khối 11 và 5 em khối 10. Tính số cách chọn 6 em trong đội đi dự trại hè sao cho mỗi khối có ít nhất 1 em được chọn.

Lời giải

Chọn tùy ý 6 em trong đội có $C_{18}^6=18564$ cách.

Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 hoặc khối 11 có $C_{13}^6=1716$ cách.

Chọn 6 em trong đội thuộc khối 12 và khối 10 có $C_{12}^6-C_7^6=917$ cách.

Chọn 6 em trong đội thuộc khối 11 và khối 10 có $C_{11}^6-C_6^6=461$ cách.

Vậy có $18564-1716-917-461=15454$ cách chọn.

Ví dụ 7.

1. Tìm số hạng chứa x^3 trong khai triển: $\left(1+x+x^2\right)^{10}$

2. Cho tập hợp A gồm n phần tử $(n>4)$. Tìm n biết rằng trong số các phần tử của A có đúng 16n tập con có số phần tử là lẻ.

Lời giải

1. Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(1+x+x^2\right)^{10}=\left[1+x(1+x)\right]^{10}$ là $C_{10}^k x^k(1+x)^k$.

Suy ra số hạng chứa x^3 ứng với $2\le k\le 3$.

Với $k=2$: $C_{10}^2 x^2(1+x)^2=C_{10}^2\left(x^2+2x^3+x^4\right)$ nên số hạng chứa x^3 là $2C_{10}^2x^3$.

Với $k=3$: $C_{10}^3x^3(1+x)^3$ có số hạng chứa x^3 là $C_{10}^3x^3$.

Vậy số hạng cần tìm là $\left(C_{10}^3+2C_{10}^2\right)x^3=210x^3$.

2. C_n^1, C_n^2, C_n^3... lần lượt là số các tập hợp con của A gồm 1,3,5... phần tử.

Ta luôn có $C_n^0+C_n^1+C_n^2+...+C_n^n=2^n \Rightarrow C_n^1+C_n^2+C_n^3+...=2^{n-1}$

Từ giả thiết, ta có phương trình: $2^{n-1}=16n \Leftrightarrow 2^{n-5}=n \quad (*)$

Vì $n>4, n\in\mathbb{Z}$ nên ta xét $n=5$ thấy không thỏa $(*)$, do đó ta xét $n\ge 6, n\in\mathbb{Z}$

Xét hàm số $f(x)=2^{x-5}-x$ liên tục trên nửa khoảng $[6;+\infty), x\in\mathbb{Z}$.

Ta có $f'(x)=2^{x-5}\ln 2-1>0, \forall x\ge 6 \Rightarrow f(x)$ liên tục và đồng biến trên nửa khoảng $[6;+\infty), x\in\mathbb{Z}$ và $f(8)=0\Rightarrow x=8$ là nghiệm duy nhất của phương trình $2^{x-5}-x=0, x\ge 6, x\in\mathbb{Z}$.

Vậy $n=8$ thỏa mãn đề bài.

Ví dụ 8. Tính tổng:

1. $S=C_{100}^0+C_{100}^2+C_{100}^4+...+C_{100}^{100}$

2. $S=C_{30}^{14}-C_{30}^{15}+C_{30}^{16}-...-C_{30}^{29}+C_{30}^{30}$

3. $S=C_{2012}^0-2C_{2012}^1+2^2C_{2012}^2-2^3C_{2012}^3+...-2^{2011}C_{2012}^{2011}+2^{2012}C_{2012}^{2012}$

Lời giải

1. $S=C_{100}^0+C_{100}^2+C_{100}^4+...+C_{100}^{100}$, xét $S'=C_{100}^1+C_{100}^3+C_{100}^5+...+C_{100}^{99}$

Ta có hệ: $\begin{cases} S+S'=2^{100} \\ S-S'=0 \end{cases} \Rightarrow 2S=2^{100} \Rightarrow S=2^{99}$

2. Áp dụng tính chất: $C_n^k+C_n^{k-1}=C_{n+1}^k \quad (1\le k\le n)$

$$S=\left(C_{29}^{13}+C_{29}^{14}\right)-\left(C_{29}^{14}+C_{29}^{15}\right)+\left(C_{29}^{15}+C_{29}^{16}\right)-...-\left(C_{29}^{28}+C_{29}^{29}\right)+C_{30}^{30}=C_{29}^{13}-C_{29}^{29}+C_{30}^{30}$$

$$=C_{29}^{13}=67863915$$

3. $(1-2)^{2012}=C_{2012}^0-2C_{2012}^1+2^2C_{2012}^2-...-2^{2011}C_{2012}^{2011}+2^{2012}C_{2012}^{2012}$

Vậy, $S=-1$

Ví dụ 9.

1. Cho $2<n, n\in\mathbb{N}$. Tính tổng: $S=C_n^1-2C_n^2+3C_n^3-4C_n^4+...+(-1)^{n-1}.n.C_n^n$

2. Tính tổng: $S=C_n^0+\frac{1}{2}C_n^1+\frac{1}{3}C_n^2+\frac{1}{4}C_n^3+...+\frac{1}{n+1}C_n^n$

Lời giải

1. Trước hết, ta chứng minh đẳng thức sau:

"Với $\forall n,k\in\mathbb{N}^*$ và $n\ge k\ge 1$, ta luôn có: $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}$"

Thật vậy, $kC_n^k=k\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{n(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=n\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}=nC_{n-1}^{k-1}$

Ta thấy: $C_n^1=nC_{n-1}^0, -2C_n^2=-nC_{n-1}^1, ..., (-1)^{n-1}nC_n^n=(-1)^{n-1}nC_{n-1}^{n-1}$

Cộng vế theo vế, ta được:

$$S=n\left(C_{n-1}^0-C_{n-1}^1+C_{n-1}^2-C_{n-1}^3+...+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\right)=n(1-1)^{n-1}=0$$

2. Ta thấy, $kC_n^k=nC_{n-1}^{k-1}\Leftrightarrow(k+1)C_{n+1}^{k+1}=(n+1)C_n^k\Leftrightarrow\frac{1}{k+1}C_n^k=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{k+1}$

Suy ra: $C_n^0=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^1, \frac{1}{2}C_n^1=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^2, \frac{1}{3}C_n^2=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^3, ..., \frac{1}{n+1}C_n^n=\frac{1}{n+1}C_{n+1}^{n+1}$

Khi đó: $S=\frac{1}{n+1}\left(C_{n+1}^1+C_{n+1}^2+C_{n+1}^3+...+C_{n+1}^{n+1}\right)=\frac{2^{n+1}-1}{n+1}$

Ví dụ 10.

Tính tổng: $S=3C_{100}^0+\frac{2^2-1}{2}C_{100}^1+\frac{2^3+1}{3}C_{100}^2+...+\frac{2^{100}-1}{100}C_{100}^{99}+\frac{2^{101}+1}{101}C_{100}^{100}$

Lời giải

Ta có: $(1+x)^{100}=C_{100}^0+C_{100}^1x+C_{100}^2x^2+...+C_{100}^{99}x^{99}+C_{100}^{100}x^{100}$

$$\Rightarrow\int_{-1}^{2}(1+x)^{100}dx=C_{100}^0\int_{-1}^{2}dx+C_{100}^1\int_{-1}^{2}xdx+...+C_{100}^{99}\int_{-1}^{2}x^{99}dx+C_{100}^{100}\int_{-1}^{2}x^{100}dx$$

$$\Rightarrow\left.\frac{(1+x)^{101}}{101}\right|_{-1}^{2}=C_{100}^0\left.\frac{x}{1}\right|_{-1}^{2}+C_{100}^1\left.\frac{x^2}{2}\right|_{-1}^{2}+...+C_{100}^{99}\left.\frac{x^{100}}{100}\right|_{-1}^{2}+C_{100}^{100}\left.\frac{x^{101}}{101}\right|_{-1}^{2}$$

$$\Rightarrow\frac{3^{101}}{101}=3C_{100}^0+\frac{2^2-1}{2}C_{100}^1+...+\frac{2^{100}-1}{100}C_{100}^{99}+\frac{2^{101}+1}{101}C_{100}^{100}$$

Vậy, $S=\frac{3^{101}}{101}$

Ví dụ 11. Chứng minh rằng: $\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}}=\dfrac{1}{2}$

Lời giải

Ta có: $\dfrac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}}=\dfrac{n}{k!(n-k)!}\cdot\dfrac{(k+1)!(n+1)!}{(n+k+2)!}=\dfrac{n!(n+1)!(k+1)}{(n-k)!(n+k+2)!}$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{n!(n+1)!}{(n-k)!(n+k+1)!}-\frac{n!(n+1)!}{(n-k-1)!(n+k+2)!}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\dfrac{(2n+1)!}{(n-k)!(n+k+1)!}}{\dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}}-\frac{\dfrac{(2n+1)!}{(n-k-1)!(n+k+2)!}}{\dfrac{(2n+1)!}{n!(n+1)!}}\right]$$

$=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{C_{2n+1}^{n-k}-C_{2n+1}^{n-k-1}}{C_{2n+1}^{n}}\right)$ (1). Đẳng thức đúng với mọi $k=0,1,2,...,n-1$

Vậy, $\sum\limits_{k=0}^{n-1}\dfrac{C_n^k}{C_{n+k+2}^{k+1}}=\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{C_{2n+1}^{n}}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\left(C_{2n+1}^{n-k}-C_{2n+1}^{n-k-1}\right)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{C_{2n+1}^{n}}.\left(C_{2n+1}^{n}-C_{2n+1}^{0}\right)$

$$=\frac{1}{2C_{2n+1}^{n}}\left(C_{2n+1}^{n}-C_{2n+1}^{0}\right)+\frac{C_n^n}{C_{2n+2}^{n+1}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2C_{2n+1}^{n}}+\frac{1}{C_{2n+2}^{n+1}}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{n!(n+1)!}{2(2n+1)!}+\frac{(n+1)!(n+1)!}{(2n+2)!}$$

$$=\frac{1}{2}-\frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}\left(\frac{1}{2}-\frac{n+1}{2n+2}\right)=\frac{1}{2}$$

Bài tập tự luyện

1. Một nhóm công nhân gồm 15 nam và 5 nữ. Người ta muốn chọn từ nhóm ra 5 người để lập thành một tổ công tác sao cho phải có 1 tổ trưởng nam, 1 tổ phó nam và có ít nhất 1 nữ. Hỏi có bao nhiêu cách lập tổ công tác.

Hướng dẫn giải

Chọn 2 trong 15 nam làm tổ trưởng và tổ phó có A_{15}^2 cách.

Chọn 3 tổ viên, trong đó có nữ.

Trường hợp 1: chọn 1 nữ và 2 nam có $5.C_{13}^2$ cách.

Trường hợp 2: chọn 2 nữ và 1 nam có $13.C_5^2$ cách.

Trường hợp 3: chọn 3 nữ có C_5^3 cách.

Vậy có $A_{15}^2\left(5.C_{13}^2+13.C_5^2+C_5^3\right)=111300$ cách.

2. Hội đồng quản trị của một công ty gồm 12 người, trong đó có 5 nữ. Từ hội đồng quản trị đó người ta bầu ra 1 chủ tịch hội đồng quản trị, 1 phó chủ tịch hội đồng quản trị và 2 ủy viên. Hỏi có mấy cách bầu sao cho trong 4 người được bầu phải có nữ.

Hướng dẫn giải

Trường hợp 1: bầu 4 người tùy ý (không phân biệt nam, nữ).

Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_{12}^2 cách.

Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_{10}^2 cách.

Suy ra có $A_{12}^2.C_{10}^2$ cách bầu tùy ý 1.

Trường hợp 2: bầu 4 người toàn nam.

Bước 1: bầu chủ tịch và phó chủ tịch có A_7^2 cách.

Bước 2: bầu 2 ủy viên có C_5^2 cách.

Suy ra có $A_7^2.C_5^2$ cách bầu toàn nam 2.

Vậy có $A_{12}^2.C_{10}^2-A_7^2.C_5^2=5520$ cách.

3. Giải vô địch bóng đá Quốc gia có 14 đội tham gia thi đấu vòng tròn 1 lượt, biết rằng trong 1 trận đấu: đội thắng được 3 điểm, hòa 1 điểm, thua 0 điểm và có 23 trận hòa. Tính số điểm trung bình của 1 trận trong toàn giải.

Hướng dẫn giải

Do thi đấu vòng tròn 1 lượt nên 2 đội bất kỳ chỉ đấu với nhau đúng 1 trận. Số trận đấu của giải là $C_{14}^2=91$

+ Tổng số điểm của 2 đội trong 1 trận hòa là 2 nên tổng số điểm của 23 trận hòa là $2.23=46$.

+ Tổng số điểm của 2 đội trong 1 trận không hòa là 3 nên tổng số điểm của 68 trận không hòa là $3.68=204$.

Vậy số điểm trung bình của 1 trận là $\dfrac{46+204}{91}=\dfrac{250}{91}$ điểm.

4. Đội thanh niên xung kích của một trường phổ thông có 12 học sinh gồm 5 học sinh lớp A, 4 học sinh lớp B và 3 học sinh lớp C. Tính số cách chọn 4 học sinh đi làm nhiệm vụ sao cho 4 học sinh này thuộc không quá 2 trong 3 lớp trên.

Hướng dẫn giải

Trường hợp 1: chọn tùy ý 4 trong 12 học sinh có $C_{12}^4=495$ cách.

Trường hợp 2: chọn 4 học sinh có mặt cả 3 lớp, ta có 3 trường hợp sau:

Chọn 2 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có $C_5^2.4.3=120$ cách

Chọn 1 học sinh lớp A, 2 học sinh lớp B và 1 học sinh lớp C có $5.C_4^2.3=90$ cách

Chọn 1 học sinh lớp A, 1 học sinh lớp B và 2 học sinh lớp C có $5.4.C_3^2=60$ cách

Vậy có $495-(120+90+60)=225$ cách.

5. Từ 20 câu hỏi trắc nghiệm gồm 9 câu dễ, 7 câu trung bình và 4 câu khó người ta chọn ra 10 câu để làm đề kiểm tra sao cho phải có đủ cả 3 loại dễ, trung bình và khó. Hỏi có thể lập được bao nhiêu đề kiểm tra.

Hướng dẫn giải

- chọn 10 câu tùy ý trong 20 câu có C_{20}^{10} cách.
- chọn 10 câu có không quá 2 trong 3 loại dễ, trung bình và khó.

Trường hợp 1: chọn 10 câu dễ và trung bình trong 16 câu có C_{16}^{10} cách.

Trường hợp 2: chọn 10 câu dễ và khó trong 13 câu có C_{13}^{10} cách.

Trường hợp 3: chọn 10 câu trung bình và khó trong 11 câu có C_{11}^{10} cách.

Vậy có $C_{20}^{10}-\left(C_{16}^{10}+C_{13}^{10}+C_{11}^{10}\right)=176451$ đề kiểm tra.

6. Tính số các số tự nhiên gồm 7 chữ số được chọn từ 1, 2, 3, 4, 5 sao cho chữ số 2 có mặt đúng 2 lần, chữ số 3 có mặt đúng 3 lần và các chữ số còn lại có mặt không quá 1 lần.

Hướng dẫn giải

Xem số có 7 chữ số như 7 vị trí thẳng hàng.

Bước 1: chọn 2 trong 7 vị trí để sắp 2 chữ số 2 (không hoán vị) có $C_7^2=21$ cách

Bước 2: chọn 3 trong 5 vị trí còn lại để sắp 3 chữ số 3 (không hoán vị) có $C_5^3=10$ cách.

Bước 3: chọn 2 trong 3 chữ số 1, 4, 5 để sắp vào 2 vị trí còn lại (có hoán vị) có $A_3^2=6$ cách.

Vậy có $21.10.6=1260$ số.

7. Tập hợp A gồm n phần tử $n\ge 4$. Biết rằng số tập hợp con chứa 4 phần tử của A bằng 20 lần số tập hợp con chứa 2 phần tử của A, tìm số $k\in\{1;\ 2;\ ...;\ n\}$ sao cho số tập hợp con chứa k phần tử của A là lớn nhất.

Hướng dẫn giải

Số tập hợp con chứa k phần tử của A là C_n^k. Ta có:

$$C_n^4=20C_n^2\Leftrightarrow\frac{n!}{4!(n-4)!}=20\frac{n!}{2!(n-2)!}\Leftrightarrow(n-2)(n-3)=240\Leftrightarrow n=18$$

$$\Rightarrow\begin{cases}C_{18}^k\ge C_{18}^{k-1}\\C_{18}^k\ge C_{18}^{k+1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{18!}{k!(18-k)!}\ge\dfrac{18!}{(k-1)!(19-k)!}\\\dfrac{18!}{k!(18-k)!}\ge\dfrac{18!}{(k+1)!(17-k)!}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}19-k\ge k\\k+1\ge 18-k\end{cases}\Leftrightarrow\frac{17}{2}\le k\le\frac{19}{2}$$

Vậy $k=9$

8. Tìm số hạng hữu tỉ trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt[3]{5}\right)^{10}$.

Hướng dẫn giải

Số hạng tổng quát trong khai triển $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt[3]{5}\right)^{10}=\left(\dfrac{1+2^{\frac{1}{2}}.5^{\frac{1}{3}}}{\sqrt{2}}\right)^{10}$ là $\dfrac{1}{32}C_{10}^k2^{\frac{k}{2}}.5^{\frac{k}{3}}$.

Số hạng hữu tỉ trong khai triển thỏa điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{k}{2}\in\mathbb{N}\\\dfrac{k}{3}\in\mathbb{N}\end{cases}\ (0\le k\le 10)\Rightarrow\left[\begin{array}{l}k=0\\k=6\end{array}\right.$

Với $k=0$: số hạng hữu tỉ là $\dfrac{1}{32}C_{10}^0=\dfrac{1}{32}$.

Với $k=6$: số hạng hữu tỉ là $\dfrac{1}{32}C_{10}^6 2^3.5^2=\dfrac{2625}{2}$.

Vậy số hạng cần tìm là $\dfrac{1}{32}$ và $\dfrac{2625}{2}$.

9. Tìm hệ số lớn nhất trong khai triển $(1+0,2x)^{17}$.

Hướng dẫn giải

$$\begin{cases}C_{17}^k(0,2)^k\ge C_{17}^{k+1}(0,2)^{k+1}\\C_{17}^k(0,2)^k\ge C_{17}^{k-1}(0,2)^{k-1}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}5\dfrac{17!}{k!(17-k)!}\ge\dfrac{17!}{(k+1)!(16-k)!}\\\dfrac{17!}{k!(17-k)!}\ge 5\dfrac{17!}{(k-1)!(18-k)!}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}5(k+1)\ge 17-k\\18-k\ge 5k\end{cases}\Leftrightarrow 2\le k\le 3$$

Với $k=2$: hệ số là $C_{17}^2(0,2)^2=5,44$.

Với $k=3$: hệ số là $C_{17}^3(0,2)^3=5,44$.

Vậy hệ số lớn nhất là 5,44.

10. Tính tổng : $S=C_{30}^1-2.2C_{30}^2+3.2^2C_{30}^3-...+29.2^{28}C_{30}^{29}-30.2^{29}C_{30}^{30}$

Hướng dẫn giải

$(1+x)^{30}=C_{30}^0+C_{30}^1x+C_{30}^2x^2+...+C_{30}^{29}x^{29}+C_{30}^{30}x^{30}$, lấy đạo hàm 2 vế rồi cho $x=-2$, ta được $S=-30$.

11. Tính tổng : $S=1.2C_{16}^2-2.3C_{16}^3+3.4C_{16}^4-...-14.15C_{16}^{15}+15.16C_{16}^{16}$

Hướng dẫn giải

$(1+x)^{16}=C_{16}^0+C_{16}^1x+C_{16}^2x^2+C_{16}^3x^3+...+C_{16}^{15}x^{15}+C_{16}^{16}x^{16}$.

Đạo hàm cấp 2 cả 2 vế rồi cho $x=-1$, ta tìm được $S=0$.

12. Tìm n để $2C_n^0+3C_n^1+4C_n^2+...+(n+1)C_n^{n-1}+(n+2)C_n^n=320$

Hướng dẫn giải

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+...+C_n^{n-1}x^{n-1}+C_n^nx^n.$$

Nhân cả 2 vế cho x^2 rồi lấy đạo hàm 2 vế, sau đó thay $x=1$, ta tìm được $n=6$.

13. Tìm số nguyên dương n, biết:

$$2C_{2n+1}^2-3.2.2C_{2n+1}^3+....+(-1)^k k(k-1)2^{k-2}C_{2n+1}^k+$$
$$+....-2n(2n+1)2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n+1}=-40200$$

Hướng dẫn giải

$$(1-x)^{2n+1}=C_{2n+1}^0-C_{2n+1}^1x+C_{2n+1}^2x^2-....+(-1)^kC_{2n+1}^kx^k+....-C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n+1}$$

Lấy đạo hàm 2 vế ta được:

$$-(2n+1)(1-x)^{2n}=-C_{2n+1}^1+2C_{2n+1}^2x-...+(-1)^kkC_{2n+1}^kx^{k-1}+....-(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n}$$

Lấy đạo hàm 2 vế lần nữa, ta được:

$$2n(2n+1)(1-x)^{2n-1}=2C_{2n+1}^2-3C_{2n+1}^3x+...$$
$$+(-1)^kk(k-1)C_{2n+1}^kx^{k-2}+....-2n(2n+1)C_{2n+1}^{2n+1}x^{2n-1}$$

Thay $x=2$, ta có:

$$-2n(2n+1)=2C_{2n+1}^2-3.2.2C_{2n+1}^3+...+(-1)^kk(k-1)2^{k-2}C_{2n+1}^k+$$
$$+...-2n(2n+1)2^{2n-1}C_{2n+1}^{2n+1}$$

$$\Leftrightarrow 2n(2n+1)=40200\Leftrightarrow 2n^2+n-20100=0\Leftrightarrow n=100$$

14. Tính tổng : $S=C_9^0+\frac{3^2-2^2}{2}C_9^1+\frac{3^3-2^3}{3}C_9^2+...+\frac{3^9-2^9}{9}C_9^8+\frac{3^{10}-2^{10}}{10}C_9^9$

Hướng dẫn giải

$$\int_2^3(1+x)^9dx=C_9^0\int_2^3dx+C_9^1\int_2^3xdx+...+C_9^8\int_2^3x^8dx+C_9^9\int_2^3x^9dx\Rightarrow S=\frac{4^{10}-3^{10}}{10}$$

Dạng 2. Xác suất

1. KHÁI NIỆM XÁC SUẤT

1.1. Phép thử và biến cố.

Phép thử ngẫu nhiên và không gian mẫu

Phép thử ngẫu nhiên (gọi tắt là phép thử) là một thí nghiệm hay một hành động mà :

- Kết quả của nó không đoán trước được;

- Có thể xác định được tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử đó.

Phép thử thường được kí hiệu bởi chữ T. Tập hợp tất cả các kết quả có thể xảy ra của phép thử được gọi là không gian mẫu của phép thử và được kí hiệu bởi chữ Ω (đọc là ô-mê-ga).

b. Biến cố

Biến cố A liên quan đến phép thử T là biến cố mà việc xảy ra hay không xảy ra của A tùy thuộc vào kết quả của T.

Mỗi kết quả của phép thử T làm cho A xảy ra, được gọi là kết quả thuận lợi cho A.

Tập hợp các kết quả thuận lợi cho A được kí hiệu là Ω_A hoặc A

Với mỗi phép thử T có một biến cố luôn xảy ra, gọi là biến cố chắc chắn.

Với mỗi phép thử T có một biến cố không bao giờ xảy ra, gọi là biến cố không thể. Kí hiệu $\varnothing$.

1.2. Tính chất

Giải sử Ω là không gian mẫu, A và là các biến cố.

- $\Omega\setminus A=\overline{A}$ được gọi là biến cố đối của biến cố A.
- $A\cup B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A hoặc B xảy ra.
- $A\cap B$ là biến cố xảy ra khi và chỉ khi A và B cùng xảy ra. $A\cap B$ còn được viết là AB.
- Nếu $AB=\varnothing$, ta nói A và B xung khắc.

1.3. Xác suất của biến cố

a. Định nghĩa cổ điển của xác suất:

Cho T là một phép thử ngẫu nhiên với không gian mẫu Ω là một tập hữu hạn. Giả sử A là một biến cố được mô ta bằng $\Omega_A\subset\Omega$. Xác suất của biến cố A, kí hiệu bởi $P(A)$, được cho bởi công thức

$$P(A)=\frac{|\Omega_A|}{|\Omega|}=\frac{\text{Số kết quả thuận lợi cho A}}{\text{Số kết quả có thể xảy ra}}.$$

Chú ý:

- Xác suất của biến cố A chỉ phụ thuộc vào số kết quả thuận lợi cho A, nên ta đồng nhất Ω_A với A nên ta có : $P(A)=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$
- $P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0, 0\le P(A)\le 1$.

b. Định nghĩa thống kê của xác suất

Xét phép thử ngẫu nhiên T và một biến cố A liên quan tới phép thử đó. Nếu tiến hành lặp đi lặp lại N lần phép thử T và thống kê số lần xuất hiện của A Khi đó xác suất của biến cố A được định nghĩa như sau:

$$P(A)=\frac{\text{Số lần xuất hiện của biến cố A}}{N}.$$